UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola d'Enginyeria de Barcelona Est

TRABAJO DE FINAL DE GRADO

Grado en Ingeniería Mecánica

ESTUDIO TENSIONAL DE UNA SECCIÓN DELGADA E IMPLEMENTACIÓN EN UN SOFTWARE DE CÁLCULO

Memoria i Anexos

Autor: Javier Gilbert
Director: Ferrán Prats

Convocatoria: Mayo 2018

Resum

Aquest projecte està basat en el desenvolupament d'un programa informàtic de càlcul tensional d'una secció prima qualsevol. Per a la realització d'aquest programa hem partit d'un detallat estudi en el qual s'han deduït les equacions per el càlcul de tensions normals i tangencials degudes a esforços axials, de tall, a moments flectors i de torsió (tant de Saint Venant com de guerxament).

Aquest programa és capaç de calcular aquestes tensions tant per seccions primes obertes com tancades, amb la excepcionalitat de les tensions tangencials degudes als esforços de tall i al torsor de guerxament que només és possible calcular per perfils oberts.

En l'elaboració de l'estudi ens hem recolzat en diversos documents i articles tècnics de professionals en la matèria amb l'objectiu final d'implementar aquestes equacions dins d'un programa informàtic elaborat amb un llenguatge de programació anomenat visual basic en entorn de Microsoft Excel.

Finalment s'ha verificat el correcte funcionament del programa mitjançant uns senzills exemples prèviament calculats de forma manual o obtingudes de la bibliografia tècnica.

Resumen

Este proyecto se basa en el desarrollo de un programa informático de cálculo tensional de una sección delgada cualquiera. Para la realización de este programa se ha partido de un detallado estudio en el cuál se han deducido las ecuaciones para el cálculo de tensiones normales y tangenciales debidas a esfuerzos axiles, cortantes, a momentos flectores y de torsión (tanto de Saint Venant como de alabeo).

Este programa es capaz de calcular dichas tensiones tanto para secciones delgadas abiertas como cerradas, con la excepcionalidad de las tensiones tangenciales debidas a los esfuerzos cortantes y al torsor de alabeo que solo es posible para perfiles abiertos.

En la elaboración del estudio nos hemos apoyado en varios documentos y artículos técnicos de profesionales en la materia con el objetivo final de implementar estas ecuaciones dentro de un programa informático elaborado con un lenguaje de programación llamado visual basic en entorno de Microsoft Excel.

Finalmente se ha verificado el correcto funcionamiento del programa mediante unos sencillos ejemplos previamente calculados de forma manual u obtenida de la bibliografía técnica.

Abstract

In the present final degree project, a software has been developed to calculate the tension of a thin-walled section. Fort the development of this software we have begin with an exhaustive study resulting in the deduction of the equations for the normal and tangent tensions calculations due to axial, shear stresses, bending and torsional moments (both of Saint Venant and of warping).

This program will be able to calculate such stresses for open and closed thin-walled sections, with the exceptionality of tangent tensions due to shear stresses and the warping torsion that will only be calculated for open profiles.

In the preparation of the study we have relied upon several documents and technical articles from professionals in the matter to implement these equations in a computer software developed with a programming language called visual basic in a Microsoft Excel interface.

Once developed, this software has been verified by means of some simple examples previously calculated manually or obtained from the technical bibliography.

Glosario

***A**, Área [L^2]*
***S_z**, Momento estático en el eje z [L^3]*
***S_y**, Momento estático en el eje y [L^3]*
***S_w**, Momento estático de alabeo [L^4]*
***I_y**, Momento de inercia en el eje y [L^4]*
***I_z**, Momento de inercia en el eje z [L^4]*
***I_{yz}**, Producto de inercia [L^4]*
***I_w**, Inercia de alabeo [L^5]*
***M_y**, Momento flector en el eje y [M]/([L^2]·[T^2])*
***M_z**, Momento flector en el eje z [M]/([L^2]·[T^2])*
***σ**, Tensión normal [M]/([L]·[T^2])*
***E**, Módulo de Young [M]/([L]·[T^2])*
***ε**, Deformación*
***B**, Bimomento [M]/([L^3]·[T^2])*
***ω**, Coordenadas sectoriales [L^2]*
***CEC**, Centro de esfuerzos cortantes*
***l**, Longitud del elemento [L]*
***t**, Espesor del elemento [L]*
***Q_y**, Esfuerzo cortante en el eje y [M]·[L]/[T^2]*
***Q_z**, Esfuerzo cortante en el eje z [M]·[L]/[T^2]*
***q**, Flujo de tensiones tangenciales [M]/[T^2]*
***τ**, Tensión tangencial [M]/([L]·[T^2])*
***T_{sv}**, Torsor de Saint Venant [M]/([L^2]·[T^2])*
***T_w**, Torsor de alabeo [M]/([L^2]·[T^2])*
***I_T**, Inercia a torsión [L^4]*
***R**, Resultante [M]·[L]/[T^2]*
***[x]**, Matriz*
***{x}**, Vector*

Índice

1. Prefacio

1.1. Origen del trabajo

El origen del trabajo parte de una colaboración del redactor del presente trabajo con el profesor de la escuela de ingeniería EEBE, Ferran Prats, para la realización de un proyecto de desarrollo de software académico con el que poder ayudar a su alumnado en la materia de Estructuras impartida en dicha escuela.

1.2. Motivación

El estudio de estructuras es un campo en el que un ingeniero mecánico tiene unos conocimientos limitados para poder proyectar cualquier estructura, siendo estudiada los conceptos más simples de ésta y dejando en mano de estructuristas y personal cualificado la realización y el dimensionado de los elementos que la componen, todo ello me sirvió de motivación a la hora de iniciar éste proyecto, con el objetivo claro de ampliar mis conocimientos en el cálculo de estructuras y poner tener un criterio de diseño con el que poder desempeñar futuros proyectos.

También el hecho de tener la oportunidad de realizar un programa con el que poder ayudar a futuros estudiantes y así ayudarles a comprender mejor la temática o simplemente ser una herramienta con la que poder realizar un cálculo de forma rápida y sencilla fue de enorme importancia para decidirme a iniciar este trabajo.

1.3. Requisitos previos

El presente proyecto requiere de una fuerte componente de aprendizaje autónomo para su realización. También necesita unos conocimientos previos en materia de Estructuras y Resistencia de materiales obtenidos durante los estudios cursados, sin olvidar los conocimientos en programación para poder desarrollar el programa, en concreto en lenguaje visual basic que es con el que trabaja el programa Microsoft Excel.

2. Introducción

El estudio de estructuras ha sido desde los orígenes de la especie humana de vital importancia, no se concibe una civilización sin la construcción de edificios en los que poder llevar a cabo cualquier actividad económica o en los que simplemente vivir. Este campo es un campo muy amplio que abarca desde el cálculo de una bancada para soportar una máquina de climatización en una cubierta hasta un tirante para la construcción de un puente.

Un ingeniero debe ser capaz de entender y dominar las técnicas con las que poder evaluar la estabilidad de la estructura que está proyectando, con el fin de asegurar que se cumplen todas las condiciones para poner esa pieza, viga, soporte o cualquiera que sea el elemento diseñado en el mercado.

Este TFG se centra en las vigas o elementos estructurales de sección delgada, los cuales son muy empleados en la construcción, garantizando una alta rigidez y resistencia, todo ello con un peso muy reducido.

2.1. Objetivos del trabajo

La elaboración del presente trabajo se realiza con el objetivo principal de seguir ampliando los conocimientos adquiridos durante los estudios cursados de Ingeniería Mecánica, más concretamente en materia de ingeniería estructural, profundizando en el cálculo tensional debido a los diferentes tipos de solicitaciones que pueden darse en un elemento de cualquier estructura.

Se le dará especial importancia al cálculo debido a un concepto poco desarrollado en los estudios, como es la torsión y con ésta los esfuerzos que origina sobre la sección, siendo el principal objetivo entender todos los conceptos y la forma de como calcularla, así como el estudio y posterior desarrollo de diferentes métodos elaborados por profesionales para poder realizar el cálculo de diversos parámetros necesarios para nuestros cálculos.

Como objetivos secundarios pero no menos importante, está el aprendizaje del lenguaje informático visual basic, con el que programaremos nuestro software informático de cálculo tensional y la capacidad de autoaprendizaje para poder realizar todo lo anterior de forma eficaz y que sea entendible para el lector.

2.2. Alcance del trabajo

El alcance del trabajo contempla el estudio de una sección delgada cualquiera desde el punto de vista de las tensiones a las que está sometida, debido a los distintos esfuerzos que pueden actuar sobre ella. En concreto, se analiza las tensiones producidas por:

- Esfuerzo axil
- Esfuerzos cortantes
- Momentos flectores
- Torsor uniforme
- Torsor de alabeo
- Bimomento

Para cada uno de ellos se deducirá y desarrollara la formulación necesaria para llegar al cálculo de las tensiones producidas en la sección.

También contempla la programación de un software con lenguaje visual basic, para poder plasmar el estudio realizado en forma de programa de cálculo.

3. Cálculo de propiedades

Previo al inicio de cualquier estudio estructural conviene realizar un exhaustivo cálculo de las propiedades de la sección representada con el objetivo de agilizar los posteriores cálculos que nos permitirán obtener las tensiones a las que está sometida esta.

Partiendo de lo anterior, a continuación se enumeran las ecuaciones con las que se obtienen las propiedades geométricas más relevantes necesarias para nuestro estudio, estas propiedades son válidas para cada elemento de nuestra sección, entendiendo como elemento aquel que en su conjunto forman una sección. Para la obtención de estas propiedades en nuestra sección estudio tan solo es necesario realizar la suma de propiedades de la totalidad de los elementos que componen nuestra sección.

En concreto, la sección de pared delgada se considera formada por una sucesión de elementos rectos conectados entre sí. El estudio de un elemento ik cualquiera de la sección se detalla a continuación, donde 't' representa su espesor y 'l' su longitud.

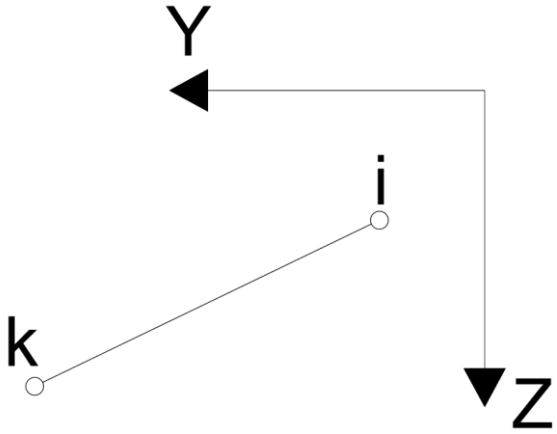


Figura 3.1. Representación de un elemento (Fuente: Javier Gilbert)

- Área:

$$A = \sum_{1}^{n} t_n \cdot l_n \qquad \textbf{(Ec. 3.1)}$$

- Momentos estáticos:

$$\boldsymbol{S_z = \sum_{1}^{n} \frac{1}{2} \cdot (y_{in} + y_{kn}) \cdot A_n} \qquad \textbf{(Ec. 3.2)}$$

$$\boldsymbol{S_y = \sum_{1}^{n} \frac{1}{2} \cdot (z_{in} + z_{kn}) \cdot A_n} \qquad \textbf{(Ec. 3.3)}$$

- Momento estático de alabeo:

$$\boldsymbol{S_\omega = \sum_{1}^{n} \frac{1}{2} \cdot (\omega_{in} + \omega_{kn}) \cdot A_n} \qquad \textbf{(Ec. 3.4)}$$

- Coordenadas centro de gravedad:

$$\boldsymbol{y_g = \frac{S_z}{A}} \qquad \textbf{(Ec. 3.5)}$$

$$\boldsymbol{z_g = \frac{S_y}{A}} \qquad \textbf{(Ec. 3.6)}$$

- Momentos de inercia:

$$\boldsymbol{I_y = \sum_{1}^{n} \frac{1}{6} \cdot [z_{in} \cdot (2 \cdot z_{in} + z_{kn}) + z_{kn} \cdot (z_{in} + 2 \cdot z_{kn}) \cdot A_n} \qquad \textbf{(Ec. 3.7)}$$

$$\boldsymbol{I_z = \sum_{1}^{n} \frac{1}{6} \cdot [y_{in} \cdot (2 \cdot y_{in} + y_{kn}) + y_{kn} \cdot (y_{in} + 2 \cdot y_{kn}) \cdot A_n} \qquad \textbf{(Ec. 3.8)}$$

- Inercia de alabeo:

$$\boldsymbol{I_\omega = \sum_{1}^{n} \frac{1}{6} \cdot [\omega_{in} \cdot (2 \cdot \omega_{in} + \omega_{kn}) + \omega_{kn} \cdot (\omega_{in} + 2 \cdot \omega_{kn})] \cdot A_n} \qquad \textbf{(Ec. 3.9)}$$

- Producto de inercia:

$$\boldsymbol{I_{yz}} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{6} \cdot \left[\mathbf{y}_{in} \cdot (2 \cdot \mathbf{z}_{in} + \mathbf{z}_{kn}) + \mathbf{y}_{kn} \cdot (\mathbf{z}_{in} + 2 \cdot \mathbf{z}_{kn})\right] \cdot \boldsymbol{A_n} \qquad \textbf{(Ec. 3.10)}$$

4. Concepto de tensión

En la teoría de estructuras se puede definir tensión como las interacciones de fuerzas necesarias para mantener el equilibrio que sufre un sólido deformable en su interior, debido a una fuerza externa que tiende a querer separar o deformarlo.

Para entender esto consideremos un cuerpo sometido a un conjunto de fuerzas o solicitaciones en equilibrio e imaginémonoslo cortado por una sección S de tal forma que quede dividida en dos cuerpos, A y B (figura 1.1). Para que exista equilibrio entre ambos cuerpos debe existir una fuerza (ΔF) en un punto del sólido (ΔS) que interactué entre ambos cuerpos evitando que se separen, a esta fuerza por unidad de área la llamaremos tensión:

$$\boldsymbol{t} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} \qquad \textbf{(Ec. 4.1)}$$

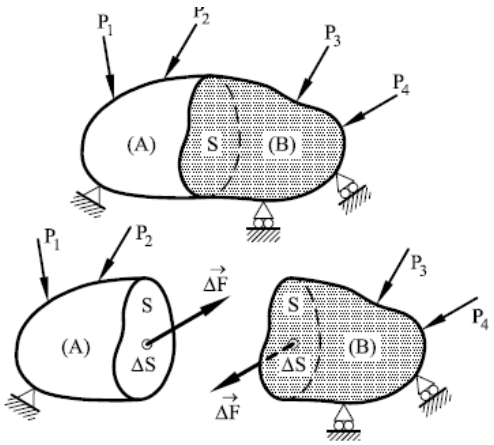


Figura 4.1. Sólido deformable sometido a fuerzas externas (Fuente: Mecánica de estructuras. Libro 1. Resistencia de Materiales)

En un sólido como en el de la figura 4.1. sometido a un conjunto de fuerzas como las representadas, genera un conjunto de tensiones internas, según la ecuación 4.2, dicha tensión se puede descomponer en una tensión normal (σ) y una tangencial (τ) al plano considerado, siendo la tensión total del sólido:

$$\boldsymbol{t} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^2 + \boldsymbol{\tau}^2} \qquad \textbf{(Ec. 4.2)}$$

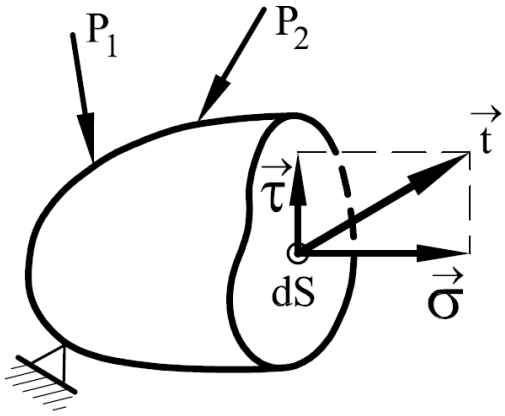


Figura 4.2. Componentes de la tensión en cada uno de los ejes (Fuente: Mecánica de estructuras. Libro 1. Resistencia de Materiales)

5. TORSIÓN

En ingeniería el concepto de torsión se define como la solicitación que se presenta cuando a una pieza prismática se le aplica un momento sobre su eje longitudinal. La torsión es de enorme importancia en el cálculo de estructuras en el cuál es práctica común obviarla o considerar que ésta es uniforme, llegando a poner en peligro la estabilidad de la estructura si no se tiene en consideración esta componente en el cálculo de las tensiones a las que está sometida la estructura.

En toda estructura se originan tensiones debidas a la torsión cuando la resultante de las fuerzas que actúan sobre esta no atraviesa el centro de esfuerzos cortantes, en adelante CEC, el cual es una propiedad geométrica de la sección y el cual su cálculo se aborda más adelante. Este a su vez es de gran importancia ya que por una parte cuando la resultante de las cargas aplicadas en una sección pasa sobre una línea coincidente con el CEC provocará que la estructura se desplace sin rotar produciendo tan solo tensiones debidas a la flexión y por otra es el punto en el cual una estructura gira cuando es sometida a un momento torsional.

La torsión se puede dividir en dos tipos, donde la diferencia entre ellas radica en la forma como se distorsiona la sección, por lo que el tipo de tensión que ejercen sobre el cuerpo será diferente:

- Torsión uniforme o de Saint Venant: se caracteriza por la presencia de esfuerzos cortantes en el plano de la sección y se produce cuando el alabeo es despreciable, produciendo únicamente tensiones tangenciales.
- Torsión de alabeo: se producen cuando además de producirse esfuerzos cortantes hay un desplazamiento en el sentido longitudinal de la estructura, a este efecto se le denomina alabeo, provocando tensiones tangenciales y normales.

El estudio de este tipo de solicitación conduce en ocasiones a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales resolubles únicamente mediante la aplicación de métodos numéricos. En los siguientes capítulos se desarrollaran los procedimientos que nos permitirán calcular de forma correcta las tensiones generadas debidas a los diferentes tipos de torsión que se generan sobre una pieza.

6. TENSIÓN NORMAL

Como ya hemos visto, la tensión se puede dividir en dos según el plano en el que actúen, en el presente capítulo se detallaran las ecuaciones que nos permitirán obtener la tensión normal cuando sobre este se le aplica uno de los siguientes tipos de esfuerzos o solicitaciones:

- Esfuerzo axil
- Momento flector
- Momento torsor

6.1. Cálculo de la tensión normal debido al axil y al momento flector

Imaginemos una sección cualquiera con los ejes tomados en el baricentro o centro de gravedad de ésta, según la figura 6.1.

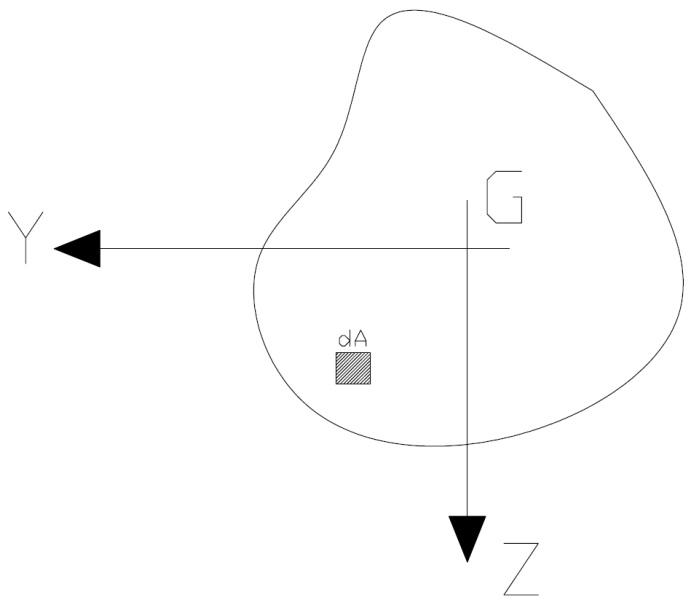


Figura 6.1. Sólido deformable con ejes baricéntricos (Fuente: Javier Gilbert)

Tal sólido como el anterior sometido a un conjunto de solicitaciones, por acción de éstas sufre una serie de movimientos en cada uno de los puntos que lo conforman, a estos movimientos lo definiremos como deformación, con la cual se puede establecer una relación para encontrar la tensión a la que está sometida nuestra pieza o sólido. Dicha relación se llama Ley de Hooke y es calculada según la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x} \qquad \textbf{(Ec. 6.1)}$$

Donde E se corresponde con el módulo de elasticidad del material del cual está compuesto el sólido.

Aislando una rebanada de la sección anterior y aplicando la hipótesis de Navier, según la cual cuando a una sección se la somete a un esfuerzo axil o flector ésta se deformará de forma que su sección deformada permanece plana, obtenemos que la distribución de deformaciones en una sección valdrá:

$$\boldsymbol{\varepsilon_x = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot y + \alpha_3 \cdot z} \qquad \textbf{(Ec. 6.2)}$$

Y por lo tanto la ecuación 6.1 queda de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 \cdot y + \alpha_3 \cdot z) = C_1 + C_2 \cdot y + C_3 \cdot z} \qquad \textbf{(Ec. 6.3)}$$

Donde α_1, α_2 y α_3 son parámetros a determinar. Para agilizar cálculos posteriores se han multiplicado estos parámetros por el módulo de elasticidad, creando las constantes C_1, C_2 y C_3, siendo ahora los parámetros a determinar.

Dado que las solicitaciones presentadas sobre nuestra rebanada son debidas a esfuerzos axiles y flectores por equilibrio de fuerzas y de momentos se obtendrá:

$$\boldsymbol{\int \sigma_x \cdot dA = C_1 \cdot \int dA + C_2 \cdot \int y \cdot dA + C_3 \cdot \int z \cdot dA = N} \qquad \textbf{(Ec. 6.4)}$$

$$\boldsymbol{\int (\sigma_x \cdot dA) \cdot y = C_1 \cdot \int y \cdot dA + C_2 \cdot \int y^2 \cdot dA + C_3 \cdot \int y \cdot z \cdot dA = -M_z} \qquad \textbf{(Ec. 6.5)}$$

$$\boldsymbol{\int (\sigma_x \cdot dA) \cdot z = C_1 \cdot \int z \cdot dA + C_2 \cdot \int y \cdot z \cdot dA + C_3 \cdot \int z^2\, dA = M_y} \qquad \textbf{(Ec. 6.6)}$$

Donde:

$$\boldsymbol{\int y \cdot dA = S_z} \qquad \textbf{(Ec. 6.7)}$$

$$\boldsymbol{\int z \cdot dA = S_y} \qquad \textbf{(Ec. 6.8)}$$

$$\boldsymbol{\int y \cdot z \cdot dA = I_{yz}} \qquad \textbf{(Ec. 6.9)}$$

$$\boldsymbol{\int y^2 \cdot dA = I_z} \qquad \textbf{(Ec. 6.10)}$$

$$\int z^2 \cdot dA = I_y \qquad \textbf{(Ec. 6.11)}$$

Traspasando el anterior conjunto de ecuaciones a un sistema matricial nos quedará un sistema de ecuaciones mediante el que podremos determinar los parámetros C_1, C_2 y C_3.

$$\begin{bmatrix} A & S_y & S_z \\ S_y & I_z & I_{yz} \\ S_z & I_{yz} & I_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{N} \\ -\mathrm{M_Z} \\ \mathrm{M_Y} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(Ec. 6.12)}$$

Dado que hemos establecido los ejes en el baricentro de nuestra sección, los momentos estáticos o primeros momentos de área (S_z y S_y) deben ser igual a cero con lo cual nos queda un sistema mucho más simple:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I_z & I_{yz} \\ 0 & I_{yz} & I_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{N} \\ -\mathrm{M_Z} \\ \mathrm{M_Y} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(Ec. 6.13)}$$

Finalmente resolviendo el anterior sistema obtenemos el valor de las tres constantes C_1, C_2 y C_3:

$$C_1 = \frac{N}{A} \qquad \textbf{(Ec. 6.14)}$$

$$C_2 = \frac{-M_z \cdot I_y - M_y \cdot I_{yz}}{I_y \cdot I_z - {I_{yz}}^2} \qquad \textbf{(Ec. 6.15)}$$

$$C_3 = \frac{M_z \cdot I_{yz} + M_y \cdot I_z}{I_y \cdot I_z - {I_{yz}}^2} \qquad \textbf{(Ec. 6.16)}$$

Sustituyendo estas tres constantes en la ecuación 6.3 conseguimos resolver y obtener la ecuación que nos proporciona la tensión normal debida a esfuerzos axiles y flectores:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z \cdot I_y + M_y \cdot I_{yz}}{I_y \cdot I_z - {I_{yz}}^2} \cdot y + \frac{M_z \cdot I_{yz} + M_y \cdot I_z}{I_y \cdot I_z - {I_{yz}}^2} \qquad \textbf{(Ec. 6.17)}$$

6.2. Cálculo de la tensión normal debida a la torsión

Según lo visto en el capítulo 5, la torsión se puede dividir en dos tipos, siendo la torsión no uniforme o de alabeo la que provoca una tensión normal en nuestra sección. Se puede definir la tensión provocada por torsión no uniforme según la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\sigma_x = \frac{B}{I_w} \cdot \omega} \qquad \textbf{(Ec. 6.18)}$$

Donde B se corresponde al bimomento, un tipo de esfuerzo interno generado cuando una pieza prismática es sometida a torsión alabeada, I_w se corresponde a la inercia o momento de alabeo y ω a las coordenadas sectoriales, un término que se define más adelante.

Estas tensiones (positivas de tracción y negativas de compresión), resultan directamente de la flexión del elemento debido a la torsión. Actúan perpendicular a la superficie de la sección transversal y son constantes en el espesor de un elemento cualquiera de la sección, pero varían en función de la longitud de éste.

En el caso que nos ocupa para poder llegar a la obtención de la tensión normal debida a torsión deben introducirse y calcularse previamente parámetros como el centro de esfuerzos cortantes, el momento de alabeo y el momento estático de alabeo, propiedades geométricas cuyo cálculo se ha abordado en este estudio.

Según lo visto en la ecuación 6.18, para la determinación de las propiedades geométricas indicadas, se deberá desarrollar el cálculo de unas coordenadas llamadas coordenadas sectoriales, también conocida con el nombre de área sectorial, alabeo unitario o alabeo sectorial, las cuales tienen unidad de $[L^2]$. La coordenada sectorial es una función ω (y,z) que predice la forma deformada de la sección transversal de un prisma mecánico con la cual podemos llegar a definir las propiedades geométricas anteriormente definidas con las que llegar al cálculo de la tensión.

La obtención de estas coordenadas y del centro de esfuerzos cortantes es una tarea complicada y que requiere de un extenso desarrollo para llegar a obtenerse resultados satisfactorios, habiéndose desarrollado una gran cantidad de métodos con los que poder llegar a realizar su cálculo. Llegados a este punto se desarrollará un método que nos llevará a la obtención de estos parámetros, llamado el método de Attard y Murray.

6.3. Cálculo de coordenadas sectoriales y centro de esfuerzos cortantes (Método de Attard y Murray)

En el presente capítulo se desarrolla un método para el cálculo del centro de esfuerzos cortantes y las coordenadas sectoriales de una sección delgada, las cuales nos permitirán obtener las tensiones normales de una sección delgada debidas al bimomento, el método descrito fue desarrollado por los ingenieros civiles N.W.Murray y M.M.Attard.

Este método a diferencia de otros, es un método directo, lo cual nos permite obtener las coordenadas sectoriales sin la necesidad del desarrollo de un gran número de pasos. A su vez nos permite calcular estos parámetros tanto para secciones delgadas abiertas como cerradas.

6.3.1. Secciones abiertas

Tal y como se ha explicado previamente, el método de Murray y Attard nos permite el cálculo de las coordenadas sectoriales.

Imaginemos a continuación que tenemos el siguiente perfil abierto, con unos ejes globales establecidos arbitrariamente:

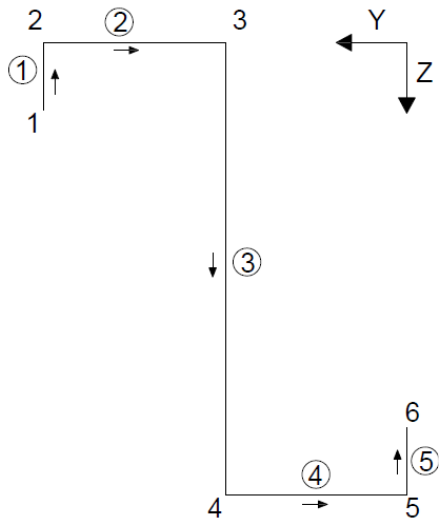


Figura 6.2. Perfil abierto de una sección delgada (Fuente: Javier Gilbert)

En un primer paso la sección estudiada se debe discretizar, numerarse todos los nodos y elementos de la sección e indicarse la dirección de cada con una flecha que nos dirá cuál es el primer nodo del elemento (en adelante, i) y cuál es el último nodo del elemento (en adelante, k), tal como se refleja en la figura 6.2.

Seguidamente se seleccionan unos ejes de coordenadas globales *yz*, estos pueden ser seleccionados arbitrariamente ya que éste método es independiente de los ejes de coordenadas empleados.

Siguiendo el ejemplo anterior podemos establecer un sistema para determinar los valores de las coordenadas sectoriales de una sección delgada, siendo ω_1, ω_2... ω_e el sistema global de incógnitas de la función de alabeo seccional o unitario de cada elemento, donde para cada uno de ellos se obtienen el conjunto de incógnitas nodal de cada elemento (ω_{i1}, ω_{k1} para el elemento 1, ω_{i2}, ω_{k2} para el elemento 2, etc). Finalmente expresaremos las coordenadas del centro de esfuerzos cortantes (CEC) como y_{CEC} y z_{CEC} las cuales introduciremos dentro de nuestro sistema de incógnitas, con el cual se obtiene el siguiente sistema de incógnitas:

$$\{\boldsymbol{\omega}_e\} = \{\boldsymbol{\omega}_{i1}, \boldsymbol{\omega}_{k1}, \boldsymbol{\omega}_{i2}, \boldsymbol{\omega}_{k2} \ldots \boldsymbol{\omega}_{i5}, \boldsymbol{\omega}_{k5}, \mathbf{y}_{CEC}, \mathbf{z}_{CEC}\} \qquad \textbf{(Ec. 6.19)}$$

Y en el sistema global:

$$\{\boldsymbol{\omega}_g\} = \{\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3 \ldots \boldsymbol{\omega}_6, \mathbf{y}_{CEC}, \mathbf{z}_{CEC}\} \qquad \textbf{(Ec. 6.20)}$$

Imaginemos a continuación un elemento como el de la figura 3.1, cuyas coordenadas iniciales y finales son (x_i, y_i) y (x_k, y_k) respectivamente y sus coordenadas sectoriales, ω_i, ω_k. Tomando como referencia un punto llamado polo (punto respecto del cual se toman las coordenadas sectoriales), en el centro de esfuerzos cortantes, con coordenadas (y_{CEC}, z_{CEC}), la diferencia entre ω_i y ω_k la obtenemos mediante la fórmula sectorial de Leibnitz:

$$\boldsymbol{\omega}_k - \boldsymbol{\omega}_i = (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_{CEC}) \cdot (\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_i) - (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{CEC}) \cdot (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_i) \qquad \textbf{(Ec. 6.21)}$$

Ordenando términos y añadiendo el sufijo n para indicar el n-ésimo elemento de la sección considerada obtenemos:

$$\boldsymbol{\omega}_{kn} - \boldsymbol{\omega}_{in} + \mathbf{y}_{CEC} \cdot (\mathbf{z}_{kn} - \mathbf{z}_{in}) - \mathbf{z}_{CEC} \cdot (\mathbf{y}_{kn} - \mathbf{y}_{in}) = \mathbf{y}_{in} \cdot (\mathbf{z}_{kn} - \mathbf{z}_{in}) - \mathbf{z}_{in} \cdot (\mathbf{y}_{kn} - \mathbf{y}_{in}) \qquad \textbf{(Ec. 6.22)}$$

Esta expresión aplicada para cada elemento de una sección delgada abierta con n elementos nos permite establecer un conjunto de ecuaciones con las que poder obtener las coordenadas sectoriales de dicha sección.

Para que las anteriores ecuaciones sean ciertas deben tenerse en cuenta tres propiedades sin las cuáles no es posible la obtención de las coordenadas sectoriales, éstas son las siguientes:

$$\int \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{dA} = \mathbf{0} \qquad \textbf{(Ec. 6.23)}$$

$$\int \mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{dA} = \mathbf{0} \qquad \textbf{(Ec. 6.24)}$$

$$\int \mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{dA} = \mathbf{0} \qquad \textbf{(Ec. 6.25)}$$

Estas propiedades establecen como requisito general que el valor promedio de ω evaluado sobre el área A del perfil debe ser cero (1ª propiedad), y cuando el polo coincide con el centro de esfuerzos cortantes, dos de las propiedades sectoriales deben ser cero (2ª y 3ª propiedad).

Para su mejor comprensión las propiedades anteriores se pueden escribir en términos de las incógnitas de cada elemento (ω_{in} y ω_{kn}), obteniendo el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\sum_{1}^{N} \mathbf{l_n} \cdot \mathbf{t_n}(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{in}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{kn}}) = \mathbf{0} \qquad \textbf{(Ec. 6.26)}$$

$$\sum_{1}^{N} \boldsymbol{l_n} \cdot \boldsymbol{t_n}[\boldsymbol{\omega_{in}} \cdot (\mathbf{2}\boldsymbol{y_{in}} + \boldsymbol{y_{kn}}) + \boldsymbol{\omega_{kn}} \cdot (\boldsymbol{y_{in}} + \mathbf{2}\boldsymbol{y_{kn}})] = \mathbf{0} \qquad \textbf{(Ec. 6.27)}$$

$$\sum_{1}^{N} \boldsymbol{l_n} \cdot \boldsymbol{t_n}[\boldsymbol{\omega_{in}} \cdot (\mathbf{2}\boldsymbol{z_{in}} + \boldsymbol{z_{kn}}) + \boldsymbol{\omega_{kn}} \cdot (\boldsymbol{z_{in}} + \mathbf{2}\boldsymbol{z_{kn}})] = \mathbf{0} \qquad \textbf{(Ec. 6.28)}$$

Donde l_n y t_n representan la longitud y el espesor del n-ésimo elemento.

Estos sistemas de ecuaciones (ec. 6.22, ec. 6.26, ec. 6.27 y ec. 6.28) se pueden reescribir en forma matricial, donde como se puede apreciar para una sección dada se obtendrán n+3 ecuaciones y 2n+2 incógnitas (coordenadas sectoriales y centro de esfuerzos cortantes), donde n es el número de elementos de la sección estudiada. Desarrollando las matrices nos queda el siguiente sistema:

$$[\boldsymbol{A}] \cdot \{\boldsymbol{\omega_e}\} = \{\boldsymbol{R}\} \qquad \textbf{(Ec. 6.29)}$$

Donde la matriz A tiene dimensiones (n+3) x (2n+2) y el vector R (n+3), tomando como ejemplo la figura 6.2, el sistema nos queda del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (z_{k1}-z_{i1}) & -(y_{k1}-y_{i1}) \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (z_{k2}-z_{i2}) & -(y_{k2}-y_{i2}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & (z_{k3}-z_{i3}) & -(y_{k3}-y_{i3}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & (z_{k4}-z_{i4}) & -(y_{k4}-y_{i4}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & (z_{k5}-z_{i5}) & -(y_{k5}-y_{i5}) \\ l_1t_1 & l_1t_1 & l_2t_2 & l_2t_2 & l_3t_3 & l_3t_3 & l_4t_4 & l_4t_4 & l_5t_5 & l_5t_5 & 0 & 0 \\ A_1 & B_1 & A_2 & B_2 & A_3 & B_3 & A_4 & B_4 & A_5 & B_5 & 0 & 0 \\ C_1 & D_1 & C_2 & D_2 & C_3 & D_3 & C_4 & D_4 & C_5 & D_5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{i1} \\ \omega_{k1} \\ \omega_{i2} \\ \omega_{k2} \\ \omega_{i3} \\ \omega_{k3} \\ \omega_{i4} \\ \omega_{k4} \\ \omega_{i5} \\ \omega_{k5} \\ y_{CEC} \\ z_{CEC} \end{pmatrix} \quad \textbf{(Ec.6.30)}$$

$$= \begin{pmatrix} y_{i1}(z_{k1}-z_{i1}) - z_{i1}(y_{k1}-y_{i1}) \\ y_{i2}(z_{k2}-z_{i2}) - z_{i2}(y_{k2}-y_{i2}) \\ y_{i3}(z_{k3}-z_{i3}) - z_{i3}(y_{k3}-y_{i3}) \\ y_{i4}(z_{k4}-z_{i4}) - z_{i4}(y_{k4}-y_{i4}) \\ y_{i5}(z_{k5}-z_{i5}) - z_{i5}(y_{k5}-y_{i5}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde:

$A_n = l_n t_n (2y_{in} + y_{kn})$

$B_n = l_n t_n (y_{in} + 2y_{kn})$

$C_n = l_n t_n (2z_{in} + z_{kn})$

$D_n = l_n t_n (z_{in} + 2z_{kn})$

Finalmente para obtener las coordenadas sectoriales globales $\{\omega_g\}$ es necesario introducir un nuevo paso, para ello utilizaremos la matriz de conectividad C:

$$\{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{e}}\} = [\mathbf{C}] \cdot \{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{g}}\} \quad \textbf{(Ec. 6.31)}$$

Donde la matriz resultante tiene las mismas dimensiones que $\{\omega_e\}$, y de la que resulta $\omega_{i1} = \omega_1$ y $\omega_{k1} = \omega_2$. Volviendo al ejemplo anterior, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \omega_{i1} \\ \omega_{k1} \\ \omega_{i2} \\ \omega_{k2} \\ \omega_{i3} \\ \omega_{k3} \\ \omega_{i4} \\ \omega_{k4} \\ \omega_{i5} \\ \omega_{k5} \\ y_{CEC} \\ z_{CEC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \\ y_{CEC} \\ z_{CEC} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(Ec. 6.32)}$$

Introduciendo estos cambios a la matriz de la ecuación 6.30, al multiplicar esta nueva matriz por la matriz A, el resultado es una nueva matriz cuadrada B, cuyas dimensiones son (n+3) x (n+3), quedando el siguiente sistema:

$$[A] \cdot \{\omega_e\} = [A] \cdot \ [C] \cdot \{\omega_g\} = [B] \cdot \{\omega_g\} = \{R\} \qquad \textbf{(Ec. 6.33)}$$

Finalmente, invirtiendo la matriz B se obtienen los valores de las coordenadas sectoriales y los centros de esfuerzos cortantes de cada elemento de la sección estudio:

$$\{\omega_g\} = [B]^{-1} \cdot \{R\} \qquad \textbf{(Ec. 6.34)}$$

6.3.2. Secciones cerradas

En caso de tener secciones cerradas, hay que añadir un nuevo término (ψ) para el cálculo de las coordenadas sectoriales y centro de esfuerzos cortantes.

En cuanto a estos, el cálculo no se ve prácticamente alterado respecto al de secciones abiertas, salvo dos pequeñas modificaciones que se explican a continuación:

- Es necesario evaluar el nuevo término o constante ψ para cada celda del perfil (considerando como celda un conjunto de elementos que cierra completamente el perfil entre sí). Para el caso de secciones cerradas la diferencia entre ω_{kn} y ω_{in} se determina mediante la siguiente ecuación:

$$\omega_{kn} - \omega_{in} = \int_0^{l_n} \left(\rho_n - \frac{\psi}{t}\right) ds \qquad \textbf{(Ec. 6.35)}$$

Donde ρ_n es la distancia perpendicular entre el n-ésimo elemento y el centro de esfuerzos cortantes. Finalmente introduciendo estos cambios en la ecuación 6.22 o ecuación de los elementos, ésta nos queda de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\omega_{kn} - \omega_{in} + y_{CEC}\,(z_{kn} - z_{in}) - z_{CEC}\,(y_{kn} - y_{in})} \qquad \textbf{(Ec. 6.36)}$$

$$\boldsymbol{= y_{in}\,(z_{kn} - z_{in}) - z_{in}\,(y_{kn} - y_{in}) - \frac{\psi l_n}{t_n}}$$

Cabe destacar que las ecuaciones de las propiedades no sufren ninguna modificación.

- Como se ha dicho anteriormente el cálculo de secciones cerradas se puede aproximar al de secciones abiertas, pero para ello es necesario contemplar ciertas modificaciones en nuestra sección cerrada para aproximar el cálculo según la ecuación desarrollada anteriormente. En una sección cerrada es necesario omitir uno de los elementos de cada una de las celdas que compongan nuestra sección, con lo cual este elemento será omitido de la formula anterior.

6.4. Resolución ejemplo cálculo coordenadas sectoriales, centro de esfuerzos cortantes y parámetro ψ

Para entender el método descrito anteriormente a continuación se realizarán varios ejemplos para la determinación de las coordenadas sectoriales y de centro de esfuerzos cortantes.

6.4.1. Sección abierta

En este ejemplo encontraremos mediante el método de Attard y Murray las coordenadas sectoriales y el centro de esfuerzos cortantes de la sección que se presenta a continuación, donde todas las unidades se presentan en cm y donde el espesor para los elementos 1 y 2 es de 3cm y para los elementos 3 y 4 es de 2 cm.

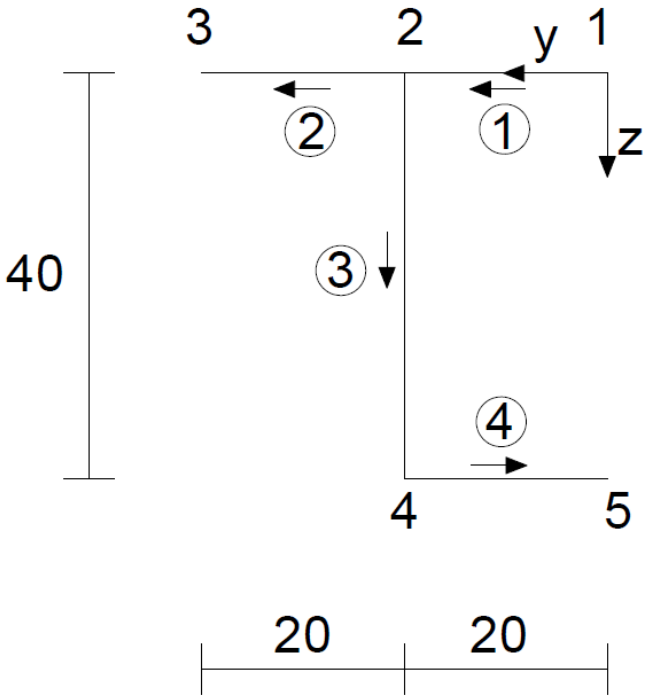


Figura 6.3. Ejemplo de sección delgada abierta (Fuente: Javier Gilbert)

La resolución del presente ejemplo se inicia con la siguiente tabla donde se indican las coordenadas nodales de cada elemento:

Elemento	Nodo i	Nodo k	y_i	z_i	y_k	z_k	t
1	1	2	0	0	20	0	3
2	2	3	20	0	40	0	3
3	2	4	20	0	20	40	2
4	4	5	20	40	0	40	2

Tabla 6.1. Coordenadas nodales y espesores de cada elemento

De donde podemos establecer nuestros sistemas de incógnitas de coordenadas sectoriales tal que así:

$$\{\omega_e\} = \{\omega_{i1}, \omega_{k1}, \omega_{i2}, \omega_{k2}, \omega_{i3}, \omega_{k3}, \omega_{i4}, \omega_{k4}, y_{CEC}, z_{CEC}\} \qquad \textbf{(Ec. 6.37)}$$

$$\{\omega_g\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, y_{CEC}, z_{CEC}\} \qquad \textbf{(Ec. 6.38)}$$

Aplicando las propiedades 6.26, 6.27 y 6.28 y la formula de Leibnitz (ec. 6.22), obtenemos el sistema de la ecuación 6.30 que para nuestra sección queda tal que así:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (z_{k1}-z_{i1}) & -(y_{k1}-y_{i1}) \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & (z_{k2}-z_{i2}) & -(y_{k2}-y_{i2}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & (z_{k3}-z_{i3}) & -(y_{k3}-y_{i3}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & (z_{k4}-z_{i4}) & -(y_{k4}-y_{i4}) \\ l_1t_1 & l_1t_1 & l_2t_2 & l_2t_2 & l_3t_3 & l_3t_3 & l_4t_4 & l_4t_4 & 0 & 0 \\ A_1 & B_1 & A_2 & B_2 & A_3 & B_3 & A_4 & B_4 & 0 & 0 \\ C_1 & D_1 & C_2 & D_2 & C_3 & D_3 & C_4 & D_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{i1} \\ \omega_{k1} \\ \omega_{i2} \\ \omega_{k2} \\ \omega_{i3} \\ \omega_{k3} \\ \omega_{i4} \\ \omega_{k4} \\ y_{CEC} \\ z_{CEC} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(Ec.6.39)}$$

$$= \begin{pmatrix} y_{i1}(z_{k1}-z_{i1}) - z_{i1}(y_{k1}-y_{i1}) \\ y_{i2}(z_{k2}-z_{i2}) - z_{i2}(y_{k2}-y_{i2}) \\ y_{i3}(z_{k3}-z_{i3}) - z_{i3}(y_{k3}-y_{i3}) \\ y_{i4}(z_{k4}-z_{i4}) - z_{i4}(y_{k4}-y_{i4}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo por los valores de nuestra sección:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 20 \\ 60 & 60 & 60 & 60 & 80 & 80 & 40 & 40 & 0 & 0 \\ 1200 & 2400 & 4800 & 6000 & 4800 & 4800 & 1600 & 800 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3200 & 6400 & 4800 & 4800 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{i1} \\ \omega_{k1} \\ \omega_{i2} \\ \omega_{k2} \\ \omega_{i3} \\ \omega_{k3} \\ \omega_{i4} \\ \omega_{k4} \\ y_{CEC} \\ z_{CEC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 800 \\ 800 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(Ec.6.40)}$$

Como se ha demostrado anteriormente para obtener las coordenadas sectoriales y centros cortantes es necesario encontrar la matriz de conectividad, C, siendo ésta en nuestro ejemplo la siguiente:

$$\begin{pmatrix} \omega_{i1} \\ \omega_{k1} \\ \omega_{i2} \\ \omega_{k2} \\ \omega_{i3} \\ \omega_{k3} \\ \omega_{i4} \\ \omega_{k4} \\ y_{CEC} \\ z_{CEC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ y_{CEC} \\ z_{CEC} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(Ec. 6.41)}$$

Reemplazando el anterior sistema en la ecuación 6.40 obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 20 \\ 60 & 60 & 60 & 60 & 80 & 80 & 40 & 40 & 0 & 0 \\ 1200 & 2400 & 4800 & 6000 & 4800 & 4800 & 1600 & 800 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3200 & 6400 & 4800 & 4800 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(Ec.6.42)}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ y_{CEC} \\ z_{CEC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 800 \\ 800 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde multiplicando la primera matriz, A, por la matriz de conectividad obtenemos una nueva matriz B, siendo ésta la mostrada a continuación:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 20 \\ 60 & 60 & 60 & 60 & 80 & 80 & 40 & 40 & 0 & 0 \\ 1200 & 2400 & 4800 & 6000 & 4800 & 4800 & 1600 & 800 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3200 & 6400 & 4800 & 4800 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(Ec.6.43)}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 20 \\ 60 & 200 & 60 & 120 & 40 & 0 & 0 \\ 1200 & 12000 & 6000 & 6400 & 800 & 0 & 0 \\ 0 & 3200 & 0 & 11200 & 4800 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siendo nuestro sistema el siguiente:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 20 \\ 60 & 200 & 60 & 120 & 40 & 0 & 0 \\ 1200 & 12000 & 6000 & 6400 & 800 & 0 & 0 \\ 0 & 3200 & 0 & 11200 & 4800 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ y_{CEC} \\ z_{CEC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 800 \\ 800 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(Ec.6.44)}$$

Finalmente para obtener las coordenadas sectoriales y las coordenadas del centro de esfuerzos cortantes de nuestra sección se debe invertir la matriz B, obteniendo los siguientes resultados:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ y_{CEC} \\ z_{CEC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 20 \\ 60 & 200 & 60 & 120 & 40 & 0 & 0 \\ 1200 & 12000 & 6000 & 6400 & 800 & 0 & 0 \\ 0 & 3200 & 0 & 11200 & 4800 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 800 \\ 800 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -103,53 \\ 18,82 \\ 141,18 \\ -207,06 \\ 470,59 \\ 25,65 \\ 6,12 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(Ec.6.45)}$$

Resultados:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ y_{CEC} \\ z_{CEC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -103,53\ cm^2 \\ 18,82\ cm^2 \\ 141,18\ cm^2 \\ -207,06\ cm^2 \\ 470,59\ cm^2 \\ 25,65\ cm \\ 6,12\ cm \end{pmatrix}$$

6.4.2. Sección cerrada

En el siguiente ejemplo veremos cómo llegar a la determinación del parámetro ψ para poder calcular las coordenadas sectoriales y centro de esfuerzos cortantes en secciones cerradas.

Para ello imaginemos la siguiente sección de perfil cerrado.

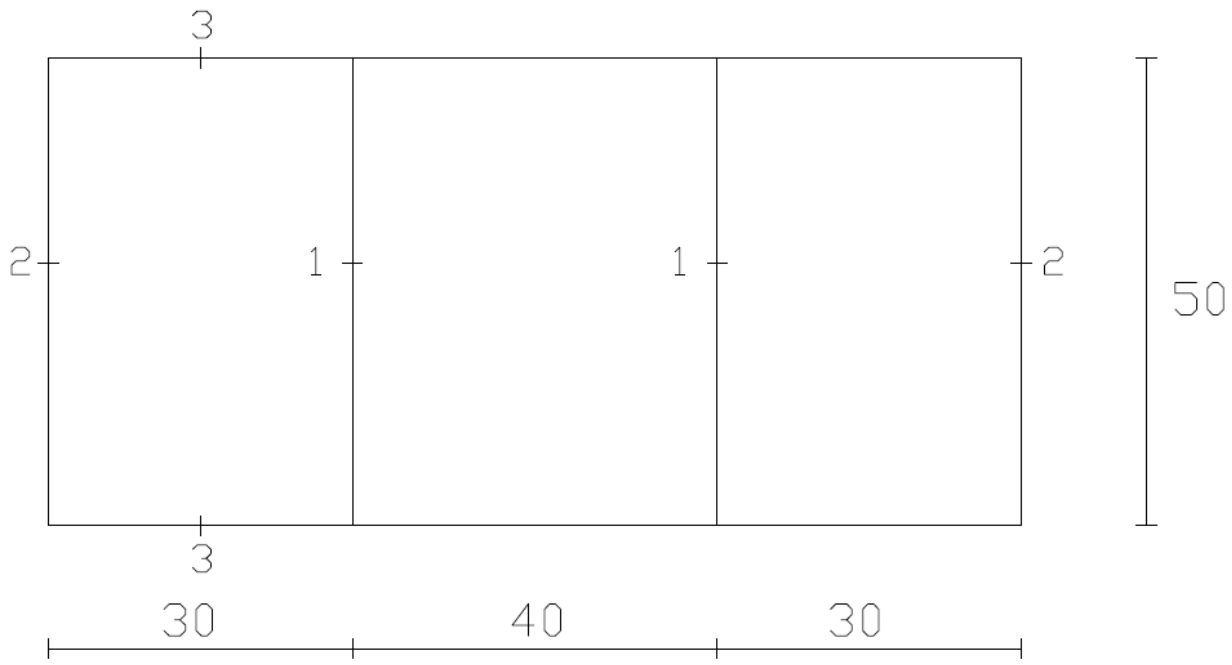


Figura 6.4. Ejemplo de sección delgada cerrada (Fuente: Javier Gilbert)

El término ψ debe ser calculado para cada celda y se determina según la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{\psi_i \cdot \oint \frac{ds}{t} = A_i} \qquad \textbf{(Ec.6.46)}$$

En el siguiente ejemplo, ordenando las celdas de izquierda a derecha, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\boldsymbol{\psi_1 \cdot \oint \frac{ds}{t} - \psi_2 \cdot \oint \frac{ds}{t} = \psi_1 \cdot [\frac{30}{3} + \frac{50}{1} + \frac{30}{3} + \frac{50}{2}] - \psi_2 \cdot [\frac{50}{1}] = 2 \cdot 50 \cdot 30} \qquad \textbf{(Ec.6.47)}$$

$$\boldsymbol{\psi_2 \cdot \oint \frac{ds}{t} - \psi_1 \cdot \oint \frac{ds}{t} - \psi_3 \cdot \oint \frac{ds}{t} = \psi_2 \cdot [\frac{40}{3} + \frac{50}{1} + \frac{40}{3} + \frac{50}{1}] - \psi_1 \cdot [\frac{50}{1}] - \psi_3 \cdot [\frac{50}{1}] = 2 \cdot 40 \cdot 50} \qquad \textbf{(Ec.6.48)}$$

$$\boldsymbol{\psi_3 \cdot \oint \frac{ds}{t} - \psi_2 \cdot \oint \frac{ds}{t} = \psi_3 \cdot [\frac{30}{3} + \frac{50}{1} + \frac{30}{3} + \frac{50}{2}] - \psi_2 \cdot [\frac{50}{1}] = 2 \cdot 50 \cdot 30} \qquad \textbf{(Ec.6.49)}$$

Resolviendo el anterior sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\boldsymbol{\psi_1 = 82,46}$$

$$\boldsymbol{\psi_2 = 96,68}$$

$$\boldsymbol{\psi_3 = 82,46}$$

7. TENSIÓN TANGENCIAL

De acuerdo al estudio de tensiones realizado en el capítulo 4, en un punto cualquiera de una sección sometida a un conjunto de fuerzas, producirá tensiones normales y cortantes, esta última será estudiada en el presente capítulo. Este tipo de tensión es generado debido a dos tipos de solicitaciones:

- Esfuerzo cortante.
- Momento torsor.

Debe advertirse que al contrario de lo que sucede con la tensión normal una sección a la que se le aplica un esfuerzo cortante provocará una distribución de tensiones que será diferente en cada punto, debiéndose estudiar de qué manera se produce dicha distribución alrededor de cada elemento que compone nuestra sección. Este capítulo está dedicado al desarrollo de los cálculos mediante los cuales podemos realizar una aproximación bastante exacta de cómo se realiza dicha distribución alrededor de cada elemento de nuestra sección.

7.1. Cálculo de flujo de tensión tangencial debida al esfuerzo cortante

Para el estudio de las tensiones provocadas por esfuerzos cortantes imaginemos una pieza prismática cualquiera como la reflejada en la figura 7.1.

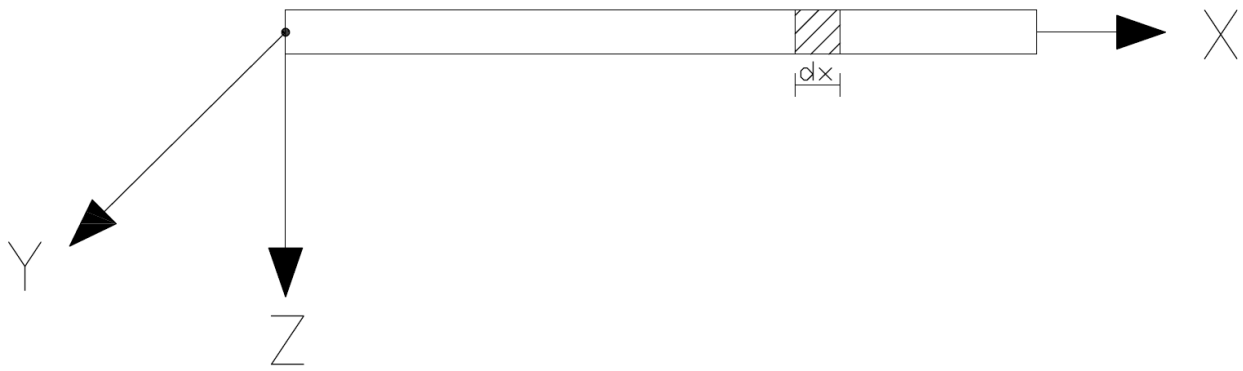


Figura 7.1. Pieza prismática (Fuente: Javier Gilbert)

Supongamos que sobre la sección de la figura 7.1 aplicamos una serie de cargas cortantes y unos momentos flectores asociados, aislando una rebanada de la sección anterior obtenemos una distribución de esfuerzos como la que se muestra a continuación.

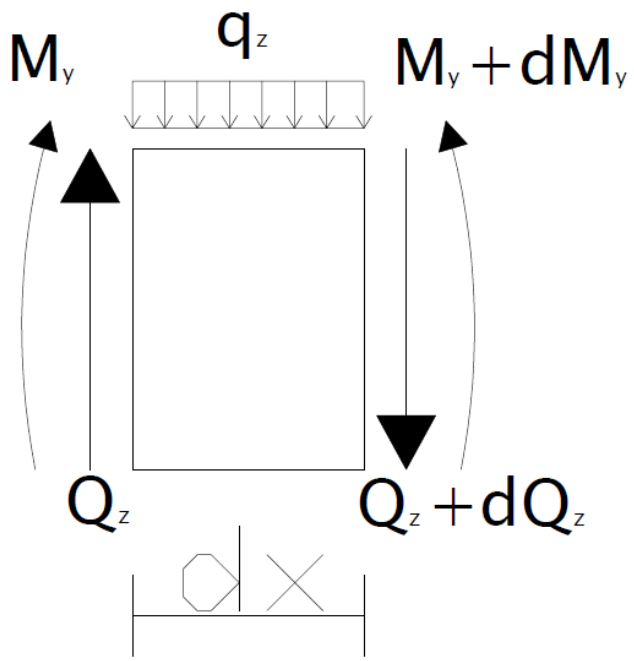


Figura 7.2. Rebanada de una sección sometida a un esfuerzo cortante y a un momento flector (Fuente: Javier Gilbert)

Para que esta rebanada se encuentre en equilibrio se debe cumplir que:

$$\sum \boldsymbol{F_z = -Q_z + Q_z + dQ_z + q_z \cdot dx = 0} \qquad \textbf{(Ec. 7.1)}$$

$$\sum \boldsymbol{M_y = -M_y - (Q_z + \cancel{dQ_z}) \cdot dx + M_y + dM_y + q_z \cdot \cancel{dx} \cdot \frac{dx}{2} = 0} \qquad \textbf{(Ec. 7.2)}$$

Como podemos observar, de la ecuación 7.2 se han obviado los términos del diferencial del cortante y del diferencial de longitud los cuales podemos considerar despreciables.

Resolviendo las anteriores expresiones, podemos hallar las siguientes relaciones:

$$\boldsymbol{-q_z = \frac{dQ_z}{dx}} \qquad \textbf{(Ec. 7.3)}$$

$$\boldsymbol{Q_z = \frac{dM_y}{dx}} \qquad \textbf{(Ec. 7.4)}$$

De donde se puede deducir que si a la misma pieza se le somete a un cortante actuando sobre el eje y, se obtendría la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{Q_y = -\frac{dM_z}{dx}} \qquad \textbf{(Ec. 7.5)}$$

Estas ecuaciones son las que nos aseguran que exista equilibrio en nuestro sólido. A continuación es necesario realizar un estudio sobre una sección de pared delgada, con el fin de obtener el flujo de tensiones tangenciales sobre una sección cualquiera, relacionándose este con la tensión tangencial según la ecuación 7.6.

$$\boldsymbol{q = \tau \cdot t} \qquad \textbf{(Ec. 7.6)}$$

Para ello imaginemos ahora una sección como la que se muestra, de espesor t, sometida a una tensión tangencial y a una tensión normal, aislando una rebanada con una anchura dx, obtenemos un conjunto de esfuerzos que actúan sobre dicha rebanada.

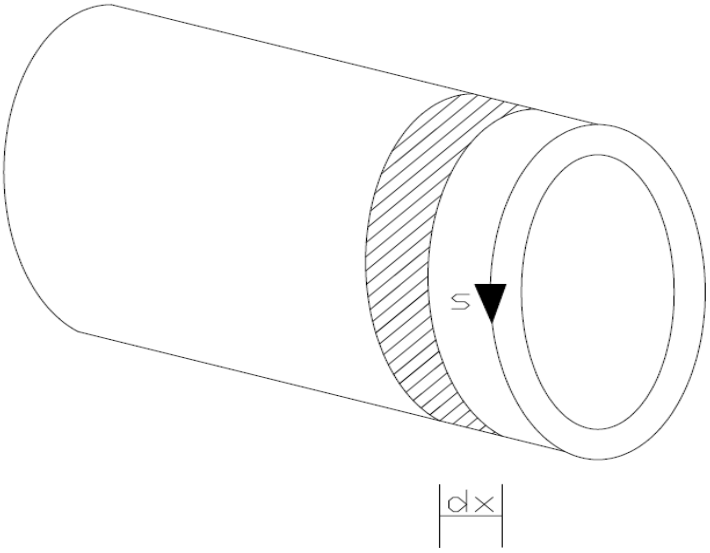


Figura 7.3. Sección de pared delgada (Fuente: Javier Gilbert)

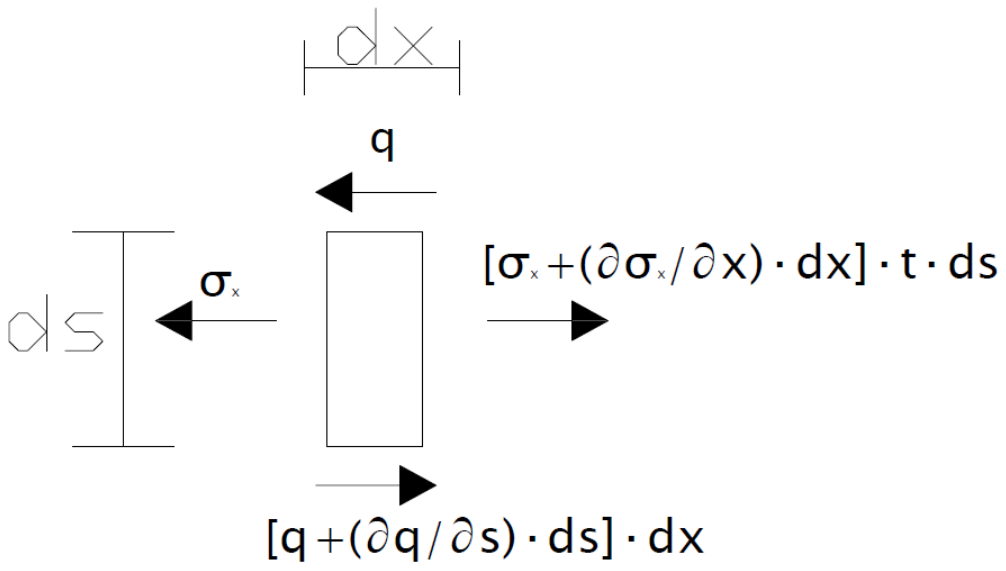


Figura 7.4. Rebanada de sección de pared delgada sometida a tensión normal y tensión cortante (Fuente: Javier Gilbert)

De nuevo, para que se cumpla el equilibrio en nuestra rebanada se debe satisfacer lo siguiente:

$$(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx) \cdot t \cdot ds + (q + \frac{\partial q}{\partial s} \cdot ds) \cdot dx - \sigma_x \cdot t \cdot ds - q \cdot dx = 0 \qquad \textbf{(Ec. 7.7)}$$

Donde s nos indica la dirección, que recorre todo el perímetro de nuestra sección y q es el flujo de tensiones tangenciales, mencionado anteriormente. Eliminando los términos repetidos obtenemos una expresión en derivadas parciales que nos relaciona el flujo de tensiones tangenciales con la variación de la tensión normal a lo largo de nuestra pieza.

$$\frac{\partial q}{\partial s} = -t \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \qquad \textbf{(Ec. 7.8)}$$

Alcanzado este punto debemos retomar la ecuación 6.17 del capítulo 6, mediante la cual hallábamos las tensiones normales, sustituyendo ésta en la ecuación 7.7 y utilizando las relaciones obtenidas en las ecuaciones 7.3, 7.4 y 7.5 podemos resolver la ecuación en derivadas parciales obteniendo la siguiente expresión:

$$\frac{\partial q}{\partial s} = -t \cdot \left[\frac{\frac{\partial N}{\partial x}}{A} - \frac{Q_z \cdot I_{yz} - Q_y \cdot I_y}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} \cdot y + \frac{Q_z \cdot I_z - Q_y \cdot I_{yz}}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} \cdot z \right] \qquad \textbf{(Ec. 7.9)}$$

Donde la variación de esfuerzo axil se puede considerar despreciable, pudiendo eliminar dicho término.

Finalmente por integración de la ecuación anterior obtenemos la expresión que nos calcula el flujo de tensiones tangenciales:

$$\boldsymbol{q = q_0 + \int_0^s \frac{\partial q}{\partial s} ds = q_0 - \left[\frac{Q_y \cdot I_y - Q_z \cdot I_{yz}}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} \cdot S_z + \frac{Q_z \cdot I_z - Q_y \cdot I_{yz}}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} \cdot S_y \right]} \quad \textbf{(Ec. 7.10)}$$

Siendo:

$$\boldsymbol{\int_0^s y \cdot t \cdot ds = S_z} \quad \textbf{(Ec. 7.11)}$$

$$\boldsymbol{\int_0^s z \cdot t \cdot ds = S_y} \quad \textbf{(Ec. 7.12)}$$

Con el objetivo de simplificar términos para poder efectuar unos cálculos posteriores con mayor rapidez, definiremos dos constantes H_1 y H_2, definiendo el flujo de tensiones de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{H_1 = \frac{Q_y \cdot I_y - Q_z \cdot I_{yz}}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2}} \quad \textbf{(Ec. 7.13)}$$

$$\boldsymbol{H_2 = \frac{Q_z \cdot I_z - Q_y \cdot I_{yz}}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2}} \quad \textbf{(Ec. 7.14)}$$

$$\boldsymbol{\Delta q = H_1 \cdot S_z + H_2 \cdot S_y} \quad \textbf{(Ec. 7.15)}$$

$$\boldsymbol{q = q_0 - \Delta q} \quad \textbf{(Ec. 7.16)}$$

Como se ha ido comentando a lo largo de este trabajo, una sección generalmente está compuesta por segmentos o elementos, tomando como referencia un elemento como el de la figura 7.5 y aplicando las ecuaciones obtenidas sobre éste, encontramos las expresiones necesarias para el cálculo del flujo en el punto inicial, medio y final del segmento, los puntos de máxima concentración de flujo tensional y la resultante que un esfuerzo provoca en un elemento dado.

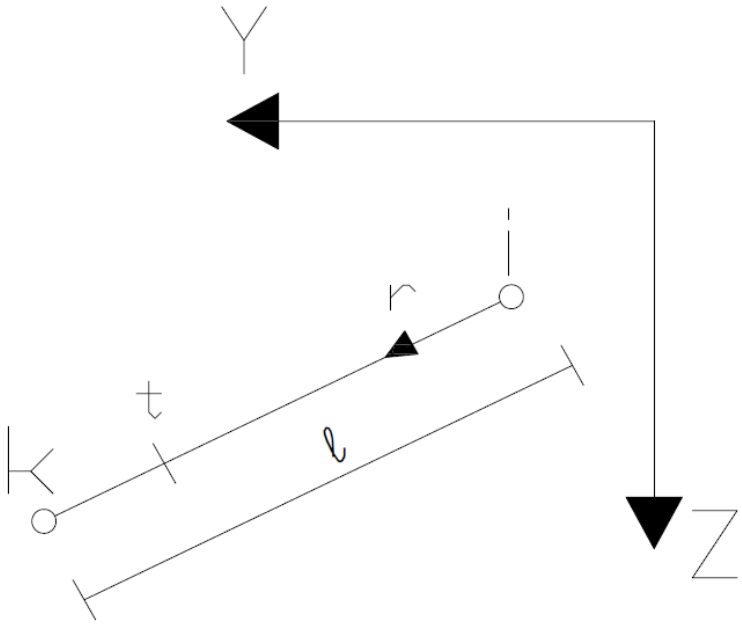


Figura 7.5. Elemento de espesor t y longitud l (Fuente: Javier Gilbert)

Teniendo en cuenta el elemento representado en la figura 7.5 con nodo inicial y finales, i, k respectivamente, de espesor t y longitud l, podemos definir las coordenadas de éste según la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{y = y_i + \frac{y_j - y_i}{l} \cdot r} \qquad \textbf{(Ec. 7.17)}$$

$$\boldsymbol{z = z_i + \frac{z_j - z_i}{l} \cdot r} \qquad \textbf{(Ec. 7.18)}$$

Introduciendo estas coordenadas en la ecuación de momentos estáticos (ec. 7.10) y resolviendo la integral obtenemos la siguiente relación entre las coordenadas de nuestro elemento y los momentos estáticos:

$$\boldsymbol{S_z = \int_0^r y \cdot t \cdot dr = [y_i \cdot r + \frac{y_j - y_i}{l} \cdot \frac{r^2}{2}] \cdot t} \qquad \textbf{(Ec. 7.19)}$$

$$\boldsymbol{S_y = \int_0^r z \cdot t \cdot dr = [z_i \cdot r + \frac{z_j - z_i}{l} \cdot \frac{r^2}{2}] \cdot t} \qquad \textbf{(Ec. 7.20)}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 7.14, obtenemos el flujo de tensiones tangenciales para un elemento:

$$\boldsymbol{\Delta q = H_1 \cdot [y_i \cdot r + \frac{y_j - y_i}{l} \cdot \frac{r}{2}] \cdot r \cdot t + H_2 \cdot [z_i \cdot r + \frac{z_j - z_i}{l} \cdot \frac{r}{2}] \cdot r \cdot t} \qquad \textbf{(Ec. 7.21)}$$

Mediante la anterior ecuación podemos calcular el flujo en los puntos iniciales, medios y finales de nuestro elemento.

- Para r = l :

$$\boldsymbol{q = q_i + \Delta q = q_i + H_1 \cdot [\frac{y_j + y_i}{2}] \cdot l \cdot t + H_2 \cdot [\frac{z_j + z_i}{2}] \cdot l \cdot t} \qquad \textbf{(Ec. 7.22)}$$

- Para r = l/2:

$$\boldsymbol{q = q_i + \Delta q = q_i + H_1 \cdot [\frac{y_j + 3 \cdot y_i}{4}] \cdot \frac{l}{2} \cdot t + H_2 \cdot [\frac{z_j + 3 \cdot z_i}{4}] \cdot \frac{l}{2} \cdot t} \qquad \textbf{(Ec. 7.23)}$$

- Para r = 0:

$$\boldsymbol{q = q_i} \qquad \textbf{(Ec. 7.24)}$$

Una vez obtenidos estos valores es necesario encontrar un punto de máxima concentración de tensiones con el fin de poder establecer como se produce la distribución de éstas alrededor de nuestro elemento, para ello derivaremos nuestra expresión de flujo 7.21 e igualaremos a cero para obtener un punto extremo.

$$\boldsymbol{\frac{dq}{dr} = H_1 \cdot y_i \cdot t + \frac{y_j - y_i}{l} \cdot r \cdot t + H_2 \cdot z_i \cdot t + \frac{z_j - z_i}{l} \cdot r \cdot t = 0} \qquad \textbf{(Ec. 7.25)}$$

$$\boldsymbol{r_{max} = -\frac{H_1 \cdot y_i + H_2 \cdot z_i}{H_1 \cdot \frac{y_j - y_i}{l} + H_2 \cdot \frac{z_j - z_i}{l}}} \qquad \textbf{(Ec. 7.26)}$$

Sustituyendo esta coordenada dentro de la ecuación de cálculo de flujo de tensiones tangenciales (ec. 7.21), encontramos el flujo en el punto máximo, es decir el flujo máximo de tensiones en nuestro elemento.

$$\boldsymbol{\Delta q_{max} = H_1 \cdot [y_i \cdot r + \frac{y_j - y_i}{l} \cdot \frac{r_{max}}{2}] \cdot r_{max} \cdot t + H_2 \cdot [z_i \cdot r + \frac{z_j - z_i}{l} \cdot \frac{r_{max}}{2} \cdot r_{max} \cdot t} \qquad \textbf{(Ec. 7.27)}$$

Finalmente solo nos queda encontrar la resultante producida por los esfuerzos aplicados sobre nuestra sección, para hallar dicha resultante se realiza la siguiente operación:

$$\boldsymbol{R = \int_0^l q \cdot ds = q_i \cdot l + H_1 \cdot [\frac{2 \cdot y_i + y_j}{6}] \cdot l^2 \cdot t + H_2 \cdot [\frac{2 \cdot z_i + z_j}{6} \cdot l^2 \cdot t} \qquad \textbf{(Ec. 7.28)}$$

7.2. Cálculo del flujo de tensión tangencial debida a la torsión

A diferencia de lo que ocurre en el cálculo de tensiones normales, las tensiones tangenciales son producidas por los dos tipos de torsión, la torsión uniforme o de Saint Venant y la torsión no uniforme o de alabeo.

En el presente subcapítulo se detallaran los cálculos necesarios para obtener ambas tensiones producidas por estas dos solicitaciones.

7.2.1. Momento torsor de Saint Venant

Como se ha comentado anteriormente este tipo de torsión se produce cuando el alabeo se puede considerar despreciable o nulo, provocando únicamente tensiones tangenciales.

Estas tensiones tangenciales están siempre presentes en la sección transversal de una sección sometida a un momento torsional, variando linealmente en el espesor del elemento de la sección transversal y actuando en la dirección paralela al eje del elemento. Se caracterizan por ser máximas e iguales, pero de dirección opuesta en los dos ejes.

Dichas tensiones se determinan por la ecuación:

$$\boldsymbol{\tau_{sv} = \frac{T_{sv}}{I_T} \cdot t} \qquad \textbf{(Ec. 7.29)}$$

Siendo T_{sv}, el momento torsor de Saint Venant e I_T la inercia a torsión de la sección.

7.2.2. Momento torsor de alabeo

Según lo visto la torsión no uniforme o de alabeo, provoca tensiones tanto normales como tangenciales, viéndose afectada la sección por el alabeo. En este capítulo se desarrollan los efectos producidas por el momento torsor de alabeo provocando un flujo de tensiones tangenciales.

Al igual que las tensiones cortantes producidas por el cortante, las tensiones tangenciales producidas por el alabeo son constantes en el espesor de un elemento de la sección transversal, pero varían en

magnitud en la longitud del elemento. Estas tensiones actúan en dirección paralela al eje del elemento y se determinan por la siguiente ecuación:

$$\tau = \frac{T_w \cdot S_w}{I_w \cdot t} \qquad \textbf{(Ec. 7.30)}$$

Al igual que ocurre con el cortante, el momento torsor no uniforme provoca flujos de tensiones tangenciales a lo largo de la longitud del elemento, siendo su cálculo similar a éste, donde el flujo de tensiones tangenciales, q se puede tomar de la siguiente ecuación:

$$q = \tau \cdot t = q_i - \frac{T_w \cdot S_w}{I_w} \qquad \textbf{(Ec. 7.31)}$$

Para abordar su cálculo volvamos a tomar como ejemplo el elemento de la figura 7.5, donde sus coordenadas sectoriales se definen según la siguiente ecuación:

$$\omega = \omega_i \frac{\omega_j - \omega_i}{l} \cdot r \qquad \textbf{(Ec. 7.32)}$$

Como se puede ver en la ecuación 7.31, es necesario obtener el momento estático de alabeo, donde ésta se calcula de la siguiente forma:

$$S_\omega = \int_0^r \omega \cdot t \cdot dr = \int_0^r [\omega_i \cdot \frac{\omega_j - \omega_i}{l} \cdot r] \cdot t \cdot dr = [\omega_i \cdot r + \frac{\omega_j - \omega_i}{l} \cdot \frac{r^2}{2}] \cdot t \qquad \textbf{(Ec. 7.33)}$$

Reemplazando ésta ecuación dentro de la 7.30 encontramos la ecuación para calcular el flujo de tensiones tangenciales en nuestro elemento:

$$q = q_i - \frac{T_w}{I_w} \cdot [\omega_i \cdot r + \frac{\omega_j - \omega_i}{l} \cdot \frac{r^2}{2}] \cdot t \qquad \textbf{(Ec. 7.34)}$$

A partir de esta ecuación podemos encontrar el flujo de cortantes en el punto inicial, medio y final de nuestro elemento.

- Para r = l:

$$q = q_i - \frac{T_w}{I_w} \cdot [\frac{\omega_i + \omega_j}{2}] \cdot t \cdot l \qquad \textbf{(Ec. 7.35)}$$

- Para r = l/2:

$$q = q_i - \frac{T_w}{I_w} \cdot [\frac{3 \cdot \omega_i + \omega_j}{8}] \cdot t \cdot l \qquad \textbf{(Ec. 7.36)}$$

- Para r = 0:

$$\boldsymbol{q = q_i} \qquad \textbf{(Ec. 7.37)}$$

Como se ha visto anteriormente para encontrar el flujo máximo y el punto donde éste se produce, solo es necesario derivar la ecuación de flujo e igualarla a cero:

$$\boldsymbol{\frac{dq}{dr} = \frac{T_w}{I_w} \cdot [\omega_i + \frac{\omega_j - \omega_i}{l} \cdot r] \cdot t = 0} \qquad \textbf{(Ec. 7.38)}$$

$$\boldsymbol{r_{max} = -\frac{\omega_i}{\frac{\omega_j - \omega_i}{l}}} \qquad \textbf{(Ec. 7.39)}$$

Sustituyendo la coordenada donde se produce el máximo en la ecuación de flujo, obtenemos el flujo máximo:

$$\boldsymbol{\Delta q_{max} = \frac{T_w}{I_w} \cdot [\omega_i \cdot r_{max} + \frac{\omega_j - \omega_i}{l} \cdot \frac{r_{max}^2}{2}] \cdot t} \qquad \textbf{(Ec. 7.40)}$$

Finalmente obtenemos la resultante debida al momento torsor ejercido sobre nuestra sección integrando el flujo de tensiones tangenciales:

$$\boldsymbol{R = \int_0^l q \cdot ds = q_i \cdot l + \frac{T_w}{I_w} \cdot t \cdot l^2 \cdot [\frac{2 \cdot \omega_i + \omega_j}{6}]} \qquad \textbf{(Ec. 7.41)}$$

8. PROGRAMA INFORMÁTICO

Una vez realizado el estudio tensional, con las ecuaciones y los métodos de cálculo desarrollados anteriormente para el cálculo de las tensiones a las que está sometida una sección delgada debido a los diferentes tipos de esfuerzos que hemos visto, se ha podido realizar un código en lenguaje visual basic con el cual programar un software informático en el programa Microsoft Excel con el que cualquiera que lo desee podrá obtener dichas tensiones mediante la introducción de unos datos simples que se explicarán más adelante.

8.1. Desarrollo del código del programa

El programa se inicia al apretar al botón calcular, en éste capítulo se desarrolla paso a paso el código y las funciones que realiza.

Al apretar al botón calcular, lo primero que ejecuta el programa es éste primer subcódigo llamado CommandButton1_Click:

```
Private Sub CommandButton1_Click()

    Hoja2.Range("I20:J46").ClearContents
    Hoja3.Range("B8:V34").ClearContents
    Hoja4.Range("B10:J36").ClearContents
    Hoja5.Range("B10:J36").ClearContents
    Hoja6.Range("B9:J35").ClearContents
    Call SECCION_DELGADA_ABIERTA

End Sub
```

Previo a la ejecución del código, borra los datos contenidos en las celdas de resultados.

Llama a ejecutar el código que nos calculará las propiedades, coordenadas sectoriales y flujo de tensiones tangenciales.

A continuación se inicia el código llamado SECCION_DELGADA_ABIERTA.

```
Option Explicit

Public Sub SECCION_DELGADA_ABIERTA()

Dim NN As Integer, NE As Integer

Dim YG() As Double, ZG() As Double

Dim N1() As Integer, N2() As Integer, T() As Double,

 L() As Double, A() As Double

NN = Hoja2.Cells(7, 3)

NE = NN – 1

ReDim YG(NN), ZG(NN), N1(NE), N2(NE),

T(NE), L(NE), A(NE)

Dim I As Integer, J As Integer, K As Integer

  For I = 1 To NN

    YG(I) = Hoja2.Cells(19 + I, 3)

    ZG(I) = Hoja2.Cells(19 + I, 4)

  Next I
```

La función Dim, dimensiona las variables que se van a utilizar en el código para realizar los cálculos.

Lee el número de nodos de la celda (7,3) de la hoja 2 y se lo asigna a la variable NN

Calcula el número de elementos de la sección.

El comando ReDim, redimensiona unas variables en función de otras.

Crea un bucle para leer las coordenadas y se las asigna a cada nodo.

```
For I = 1 To NE
    N1(I) = Hoja2.Cells(19 + I, 6)
    N2(I) = Hoja2.Cells(19 + I, 7)
    T(I) = Hoja2.Cells(19 + I, 8)
    L(I) = Sqr((ZG(N2(I)) - ZG(N1(I))) ^ 2 +
    (YG(N2(I)) - YG(N1(I))) ^ 2)
    A(I) = L(I) * T(I)
Next I
```

Crea un bucle para leer los nodos que forman cada elemento, lee el espesor de éstos y cálcula la longitud y el área de cada elemento.

```
Dim AREA As Double, SYG As Double,
SZG As Double, S As Double, C As Double,
Iyy As Double, Iyz As Double, Izz As Double
```

```
AREA = 0#: SYG = 0#: SZG = 0#: Iyy = 0#:
Izz = 0#: Iyz = 0#
```

Establece los valores iniciales de área, momentos estáticos, de inercia y producto de inercia a cero.

```
For J = 1 To NE
    AREA = AREA + A(J)
    SYG = SYG + A(J) * (ZG(N1(J)) +
    ZG(N2(J))) / 2#
    SZG = SZG + A(J) * (YG(N1(J)) +
    YG(N2(J))) / 2#
    S = (ZG(N2(J)) - ZG(N1(J))) / L(J)
    C = (YG(N2(J)) - YG(N1(J))) / L(J)
    Iyy = Iyy + A(J) * ((ZG(N1(J)) + ZG(N2(J)))
```

Crea un bucle donde se recorren todos los elementos y suma el área, momentos estáticos, de inercia y productos de inercia de cada uno de los elementos.

```
/ 2#) ^ 2 + 1# / 12# * T(J) * L(J) ^ 3 * S ^ 2
+ 1# / 12# * L(J) * T(J) ^ 3 * C ^ 2
Izz = Izz + A(J) * ((YG(N1(J)) + YG(N2(J))) /
2#) ^ 2 + 1# / 12# * T(J) * L(J) ^ 3 * C ^ 2 '+
1# / 12# * L(J) * T(J) ^ 3 * S ^ 2
Iyz = Iyz + A(J) * ((ZG(N1(J)) + ZG(N2(J))) /
2#) * ((YG(N1(J)) + YG(N2(J))) / 2#) + 1# /
12# * T(J) * L(J) ^ 3 * C * S '+ 1# / 12# * L(J)
* T(J) ^ 3 * C * S
Next J
```

```
Hoja2.Cells(7, 13) = AREA
Hoja2.Cells(9, 13) = SYG
Hoja2.Cells(10, 13) = SZG
```

Copia cada valor encontrado a una celda de la hoja 2.

```
Dim YCDG As Double, ZCDG As Double
```

```
YCDG = SZG / AREA
ZCDG = SYG / AREA
Hoja2.Cells(12, 13) = YCDG
Hoja2.Cells(13, 13) = ZCDG
```

Calcula los centros de gravedad y copia los resultados en una celda de la hoja 2.

```
Iyy = Iyy - AREA * ZCDG ^ 2
Iyz = Iyz - AREA * ZCDG * YCDG
Izz = Izz - AREA * YCDG ^ 2
Hoja2.Cells(15, 13) = Iyy
```

Calcula los momentos de inercia y productos de inercia de la sección y copia los resultados en una celda de la hoja 2.

```
Hoja2.Cells(16, 13) = Izz

Hoja2.Cells(17, 13) = Iyz

Dim ZC() As Double, YC() As Double

ReDim ZC(NN), YC(NN)

For I = 1 To NN

  ZC(I) = ZG(I) - ZCDG

  YC(I) = YG(I) - YCDG

  Hoja3.Cells(7 + I, 2) = I

  Hoja3.Cells(7 + I, 3) = YG(I)

  Hoja3.Cells(7 + I, 4) = ZG(I)

  Hoja3.Cells(7 + I, 5) = YC(I)

  Hoja3.Cells(7 + I, 6) = ZC(I)

Next I
```

Crea un bucle donde se establecen unas coordenadas baricéntricas a cada nodo de la sección y copia cada nodo y sus coordenadas globales y baricéntricas en unas celdas de la hoja 3.

A continuación el código ejecuta el método de Attard y Murray para calcular las coordenadas sectoriales y centro de esfuerzos cortantes.

```
'METODO DIRECTO DE ATTARD&MURRAY

  Dim X() As Double, y() As Double

  ReDim X(NN), y(NN)

  For I = 1 To NN

    X(I) = -YG(I)

    y(I) = ZG(I)

  Next I

  Dim AA() As Double, R() As Double,
```

```
AUX1 As Double, AUX2 As Double

  ReDim AA(NE + 3, 2 * NE + 2), R(NE + 3)

  For I = 1 To NE

    AA(I, 2 * I - 1) = -1#

    AA(I, 2 * I) = 1#

    AA(I, 2 * NE + 1) = y(N2(I)) - y(N1(I))

    AA(I, 2 * NE + 2) = -(X(N2(I)) - X(N1(I)))

    R(I) = X(N1(I)) * (y(N2(I)) - y(N1(I)))

    R(I) = R(I) - y(N1(I)) * (X(N2(I)) - X(N1(I)))

  Next I
```

Crea un bucle y crea la matriz A y la matriz R.

```
  'PROPERTY EQUATIONS

  For I = 1 To NE

    AA(NE + 1, 2 * I - 1) = L(I) * T(I)

    AA(NE + 1, 2 * I) = L(I) * T(I)

  Next I

  For I = 1 To NE

   AUX1 = L(I) * T(I) * (2# * X(N1(I)) + X(N2(I)))

   AUX2 = L(I) * T(I) * (X(N1(I)) + 2# * X(N2(I)))

   AA(NE + 2, 2 * I - 1) = AUX1

   AA(NE + 2, 2 * I) = AUX2

  Next I

  For I = 1 To NE
```

Crea un bucle y acaba de crear las filas de la matriz A correspondientes a las ecuaciones de propiedades. Para facilitar el cálculo se crea variables auxiliares.

```
AUX1 = L(I) * T(I) * (2# * y(N1(I)) + y(N2(I)))

AUX2 = L(I) * T(I) * (y(N1(I)) + 2# * y(N2(I)))

AA(NE + 3, 2 * I - 1) = AUX1

AA(NE + 3, 2 * I) = AUX2

Next I
```

```
'C-MATRIX

Dim CC() As Double

ReDim CC(2 * NE + 2, NE + 3)

For I = 1 To NE

   CC(2 * I - 1, N1(I)) = 1#

   CC(2 * I, N2(I)) = 1#

Next I

CC(2 * NE + 1, NE + 2) = 1#

CC(2 * NE + 2, NE + 3) = 1#
```

Crea un bucle y calcula la matriz de conectividad C.

```
'B-MATRIX

Dim B() As Double

ReDim B(NE + 3, NE + 3)

For I = 1 To NE + 3

   For J = 1 To NE + 3

      B(I, J) = 0#

      For K = 1 To 2 * NE + 2

         B(I, J) = B(I, J) + AA(I, K) * CC(K, J)
```

Crea diversos bucles para calcula la matriz B a partir de la matriz A y la matriz de conectividad.

```
    Next K

  Next J

Next I

'RESULTS

Dim w() As Double

ReDim w(NN + 2)

  Call GJ(B)

  For I = 1 To NE + 3

    w(I) = 0#

    For J = 1 To NE + 3

      w(I) = w(I) + B(I, J) * R(J)

    Next J

  Next I

  For I = 1 To NN

    w(I) = -w(I)

  Next I

  Dim SW As Double, IXW As Double,

  IYW As Double, IWW As Double,

  IT As Double

  Dim XM As Double, WI As Double,

 WK As Double, YI As Double,

 YK As Double,
```

Llama a la función Gauss Jordan y la ejecuta.

Calcula las coordenadas sectoriales de cada nodo.

```
XI As Double, XK As Double

SW = 0#: IXW = 0#: IYW = 0#: IWW = 0#:

IT = 0#

For I = 1 To NE

   WI = w(N1(I)): WK = w(N2(I))

   YI = y(N1(I)): YK = y(N2(I))

   XI = X(N1(I)): XK = X(N2(I))

   SW = SW + T(I) * L(I) * (WI + WK) / 2#

   IXW = IXW + T(I) * L(I) * (WI *

   (YK + 2# * YI) + WK * (YI + 2# * YK))

   IYW = IYW + T(I) * L(I) * (WI *

  (XK + 2# * XI) + WK * (XI + 2# * XK))

   IWW = IWW + T(I) * L(I) *

  (WI * WI + WI * WK + WK * WK) / 3#

Next I
```

Crea un bucle y calcula el momento estático de alabeo, los momentos y la inercia de alabeo.

```
For I = 1 To NE

   IT = IT + L(I) * T(I) ^ 3 / 3#

Next I
```

Crea un bucle y calcula la inercia a torsión de la sección.

```
Dim YGCEC As Double, ZGCEC As Double

YGCEC = -w(NN + 1)

ZGCEC = w(NN + 2)
```

Calcula las coordenadas del centro de esfuerzos cortantes.

```
For I = 1 To NN
    Hoja2.Cells(19 + I, 9) = I
    Hoja2.Cells(19 + I, 10) = w(I)
Next I
```

Crea un bucle y muestra los nodos y los resultados de las coordenadas sectoriales en las celdas de la hoja 2.

```
Hoja2.Cells(19, 13) = IT
Hoja2.Cells(20, 13) = IWW
Hoja2.Cells(22, 13) = YGCEC
Hoja2.Cells(23, 13) = ZGCEC
Hoja2.Cells(19, 17) = -IXW
Hoja2.Cells(20, 17) = IYW
```

Muestra los resultados de la inercia a torsión, la inercia de alabeo, centros de esfuerzos cortantes y momentos de inercia de alabeo en las celdas seleccionadas de la hoja 2.

A continuación calcula los flujos de tensiones tangenciales debidos a los cortantes y al torsor de alabeo por el método de Prokic.

```
'FLUJOS DEBIDOS AL ESFUERZO CORTANTE Y AL TORSOR DE ALABEO INDEPENDIENTEMENTE
'MÉTODO DE PROKIC
Dim CORTANTE As Integer
CORTANTE = 1
FLUJOCORTANTES:
'CÁLCULO DEL FLUJO DE CORTANTE
'NUMERO DE ELEMENTOS EN CADA NODO
Dim NUMELEM() As Integer, ELEM() As Integer, NUMELEM2() As Integer
ReDim NUMELEM(NN), ELEM(NN, 10), NUMELEM2(NN)
```

Crea una etiqueta para posteriormente volver a éste punto del código.

```
For I = 1 To NN
    K = 0
    For J = 1 To NE
        If N1(J) = I Or N2(J) = I Then
            K = K + 1
            If K = 11 Then Stop
            ELEM(I, K) = J
        End If
    Next J
    NUMELEM(I) = K
    NUMELEM2(I) = K
Next I
```

Crea una serie de bucles que recorren los elementos y nodos, calculando cuantos elementos hay en cada nodo.

```
Dim H1 As Double, H2 As Double,
QY As Double, QZ As Double,
TW As Double
```

```
If CORTANTE = 1 Then
    QZ = 0#
    QY = Hoja2.Cells(11, 7)
    TW = Hoja2.Cells(14, 7)
Else
    QZ = Hoja2.Cells(12, 7)
    QY = 0#
```

Crea un bucle para realizar los cálculos de tensiones debidos al cortante Qz y Qy por separado, asignando el valor dado en una celda a las diferentes variables de esfuerzos (Qy, Qz, Tw).

```
End If

H1 = (Iyy * QY - Iyz * QZ) /
(Iyy * Izz - Iyz * Iyz)
H2 = (Izz * QZ - Iyz * QY) /
(Iyy * Izz - Iyz * Iyz)
```

Calcula las constantes H_1 y H_2 necesarias para el cálculo del flujo de tensiones tangenciales.

```
Dim FLAG As Integer, NI As Integer,
NJ As Integer
FLAG = 1
Dim ELEMENTOS As Integer, AUX As Double,
VISIT() As Integer, FLUJO() As Double,
SWW() As Double, FLUJOTW() As Double
ReDim VISIT(NE), FLUJO(NE, 6), SWW(NE, 6),
FLUJOTW(NE, 6)
For J = 1 To NE
   VISIT(J) = 1
Next J
SIGUIENTE:
```

Crea una etiqueta llamada siguiente.

```
ELEMENTOS = 1
For I = 1 To NN
   If NUMELEM(I) = 1 Then
      ELEMENTOS = 0
      For K = 1 To NUMELEM2(I)
```

Crea un bucle y va visitando cada elemento para finalmente ordenar cada nodo según sea inicial o final de cada elemento.

```
    If VISIT(ELEM(I, K)) = 1 Then J =
    ELEM(I, K)
  Next K
  NI = N1(J)
  NJ = N2(J)
  If I = NI Then
  Else
    K = N1(J)
    N1(J) = N2(J)
    N2(J) = K
    NI = N1(J)
    NJ = N2(J)
  End If
```

```
  Dim AUX3 As Double, AUX4 As Double
```

```
  AUX1 = (3# * ZC(NI) + ZC(NJ)) / 8# * A(J)
  AUX2 = (ZC(NI) + ZC(NJ)) / 2# * A(J)
  AUX3 = (3# * YC(NI) + YC(NJ)) / 8# * A(J)
  AUX4 = (YC(NI) + YC(NJ)) / 2# * A(J)
```

Crea unas variables auxiliares necesarias para el cálculo de los flujos en cada punto del elemento.

```
  'FLUJO
```

```
  FLUJO(J, 1) = 0#
  For K = 1 To NUMELEM2(I)
    If VISIT(ELEM(I, K)) = 0 Then
```

Crea un bucle y calcula el flujo en el nodo inicial de cada elemento, empezando por los nodos con flujo = 0.

```
        FLUJO(J, 1) = FLUJO(J, 1) +
        FLUJO(ELEM(I, K), 3)
    End If
Next K
```

```
FLUJO(J, 2) = FLUJO(J, 1) + H1 * AUX3
+ H2 * AUX1
FLUJO(J, 3) = FLUJO(J, 1) + H1 * AUX4
+ H2 * AUX2
```

Calcula el flujo en el punto medio y final del elemento a partir del flujo inicial.

```
'MÁXIMO
FLUJO(J, 4) = -1#
FLUJO(J, 5) = 0#
Dim SMAX As Double,
AUX5 As Double, AUX6 As Double
```

```
AUX6 = (H1 * (YC(N2(J)) - YC(N1(J)))
+ H2 * (ZC(N2(J)) - ZC(N1(J)))) / L(J)
If AUX6 <> 0# Then
    AUX5 = (H1 * YC(N1(J)) + H2
    * ZC(N1(J)))
    SMAX = -AUX5 / AUX6
    If SMAX >= 0# And SMAX
    <= L(J) Then
        FLUJO(J, 4) = SMAX
```

Crea variables auxiliares con las que se establecen una serie de restricciones, con el objetivo de encontrar el punto donde el flujo es máximo y su valor. Finalmente si hay un punto de flujo máximo calcula el valor de éste punto y su flujo, en caso contrario te muestra un -1 en el punto de flujo máximo y un 0 en el flujo máximo.

```
            AUX5 = YC(N1(J)) + (YC(N2(J)) –
            YC(N1(J))) / L(J) * SMAX / 2#
            AUX6 = ZC(N1(J)) + (ZC(N2(J)) –
           ZC(N1(J))) / L(J) * SMAX / 2#
            FLUJO(J, 5) = FLUJO(J, 1) + H1
            * AUX5 * SMAX * T(J) + H2
             * AUX6 * SMAX * T(J)
        End If
    End If
```

'RESULTANTE

```
    FLUJO(J, 6) = H2 * (2# * ZC(NI) + ZC(NJ))
    / 6# * A(J) * L(J)
    FLUJO(J, 6) = FLUJO(J, 6) + H1 *
   (2# * YC(NI) + YC(NJ)) / 6# * A(J) * L(J)
    FLUJO(J, 6) = FLUJO(J, 6) + FLUJO(J, 1)
    * L(J)
```

Calcula la resultante producida por los esfuerzos cortantes.

'MOMENTO ESTÁTICO DE ALABEO

```
    SWW(J, 1) = 0#
    For K = 1 To NUMELEM2(I)
       If VISIT(ELEM(I, K)) = 0 Then
          SWW(J, 1) = SWW(J, 1) +
         SWW(ELEM(I, K), 3)
```

Ejecuta los mismos pasos que se han desarrollado anteriormente para encontrar los flujos, el punto de flujo máximo y la resultante debida al momento torsor de alabeo.

```
    End If
  Next K
  SWW(J, 2) = SWW(J, 1) + (3# * w(N1(J))
+ w(N2(J))) / 8# * A(J)
  SWW(J, 3) = SWW(J, 1) + (w(N1(J))
+ w(N2(J))) / 2# * A(J)
  AUX5 = -w(N1(J)) / (w(N2(J))
  - w(N1(J))) * L(J)
  If AUX5 > 0# And AUX5 < L(J) Then
    SWW(J, 4) = AUX5
    SWW(J, 5) = SWW(J, 1) +
   (w(N1(J)) * AUX5 + (w(N2(J))
   - w(N1(J))) / L(J) * AUX5 *
    AUX5 / 2#) * T(J)
  Else
    SWW(J, 4) = -1#
    SWW(J, 5) = 0#
  End If
  SWW(J, 6) = SWW(J, 1) * L(J) + T(J)
 * L(J) * L(J) * (2# * w(N1(J))
 + w(N2(J))) / 6#
```

```
        FLUJOTW(J, 1) = TW / IWW * SWW(J, 1)

        FLUJOTW(J, 2) = TW / IWW * SWW(J, 2)

        FLUJOTW(J, 3) = TW / IWW * SWW(J, 3)

        FLUJOTW(J, 4) = SWW(J, 4)

        FLUJOTW(J, 5) = TW / IWW * SWW(J, 5)

        FLUJOTW(J, 6) = TW / IWW * SWW(J, 6)

        'SEGUIMOS

        VISIT(J) = 0

        NUMELEM(NJ) = NUMELEM(NJ) - 1

        NUMELEM(NI) = NUMELEM(NI) - 1

    End If

Next I

FLAG = FLAG + 1

If ELEMENTOS = 0 Then GoTo SIGUIENTE
```

Una vez ya ha encontrado los flujos en cada punto del elemento, visita al siguiente elemento conectado a un elemento ya calculado previamente y vuelve a calcular el flujo en éste, así hasta haber visitado todos los elementos de la sección.

```
If CORTANTE = 1 Then

    Hoja4.Cells(5, 3) = QY: Hoja4.Cells(6, 3)

    = QZ

    For J = 1 To NE

        Hoja4.Cells(9 + J, 2) = J

        Hoja4.Cells(9 + J, 3) = N1(J)

        Hoja4.Cells(9 + J, 4) = N2(J)
```

Crea un bucle y te devuelve los resultados de flujos, punto máximo y resultante debido al cortante en el eje y, te copia éstos valores en las celdas correspondientes de la hoja 4.

```
    For I = 1 To 6
        Hoja4.Cells(9 + J, 4 + I) = FLUJO(J, I)
    Next I
Next J
'RESULTANTES TOTALES
Dim RZ As Double, RY As Double
RZ = 0#: RY = 0#
For J = 1 To NE
    S = (ZG(N2(J)) - ZG(N1(J))) / L(J)
    C = (YG(N2(J)) - YG(N1(J))) / L(J)
    RZ = RZ - FLUJO(J, 6) * S
    RY = RY - FLUJO(J, 6) * C
Next J
Hoja4.Cells(5, 6) = RY
Hoja4.Cells(6, 6) = RZ
```

```
'MOMENTOS ESTÁTICOS DE ALABEO O FLUJO
Hoja6.Cells(5, 3) = TW
```

```
For J = 1 To NE
    Hoja6.Cells(8 + J, 2) = J
    Hoja6.Cells(8 + J, 3) = N1(J)
    Hoja6.Cells(8 + J, 4) = N2(J)
```

Crea un bucle y te devuelve los resultados de flujos, punto máximo y resultante debido al torsor de alabeo, te copia éstos valores en las celdas correspondientes de la hoja 6.

```
    For I = 1 To 6
        Hoja6.Cells(8 + J, 4 + I) =
        FLUJOTW(J, I)
    Next I
Next J
```

'SIGUIENTE FLUJO DE CORTANTES

```
CORTANTE = 2
GoTo FLUJOCORTANTES
```

Vuelve a la etiqueta flujocortantes y realiza los cálculos anteriores para el cortante en el eje z.

```
Else
Hoja5.Cells(5, 3) = QY: Hoja5.Cells(6, 3) = QZ
For J = 1 To NE
    Hoja5.Cells(9 + J, 2) = J
    Hoja5.Cells(9 + J, 3) = N1(J)
    Hoja5.Cells(9 + J, 4) = N2(J)
    For I = 1 To 6
        Hoja5.Cells(9 + J, 4 + I) = FLUJO(J, I)
    Next I
Next J
'RESULTANTES TOTALES
RZ = 0#: RY = 0#
For J = 1 To NE
```

Crea un bucle y te devuelve los resultados de flujos, punto máximo y resultante debido al cortante en el eje z, te copia éstos valores en las celdas correspondientes de la hoja 5.

```
    S = (ZG(N2(J)) - ZG(N1(J))) / L(J)

    C = (YG(N2(J)) - YG(N1(J))) / L(J)

    RZ = RZ - FLUJO(J, 6) * S

    RY = RY - FLUJO(J, 6) * C

  Next J

  Hoja5.Cells(5, 6) = RY

  Hoja5.Cells(6, 6) = RZ

End If
```

'FLUJO DE TENSIONES TANGENCIALES TOTALES

'NUMERO DE ELEMENTOS EN CADA NODO

```
ReDim NUMELEM(NN), ELEM(NN, 10),

NUMELEM2(NN)

For I = 1 To NN

  K = 0

  For J = 1 To NE

    If N1(J) = I Or N2(J) = I Then

      K = K + 1

      If K = 11 Then Stop

      ELEM(I, K) = J

    End If
```

En las siguientes 7 páginas se ejecuta los mismos pasos para calcular el flujo, punto máximo y resultante debido a esfuerzos cortantes y torsor de alabeo y muestra los resultados en la página 3.

```
    Next J

    NUMELEM(I) = K

    NUMELEM2(I) = K

  Next I

  QY = Hoja2.Cells(11, 7)

  QZ = Hoja2.Cells(12, 7)

  H1 = (Iyy * QY - Iyz * QZ) / (Iyy * Izz - Iyz

* Iyz)

  H2 = (Izz * QZ - Iyz * QY) / (Iyy * Izz - Iyz

* Iyz)

  TW = Hoja2.Cells(14, 7)

  Dim H3 As Double

  H3 = TW / IWW



  'PROKIC

  FLAG = 1

  For J = 1 To NE

    VISIT(J) = 1

  Next J

SIGUIENTE2:

  ELEMENTOS = 1

  For I = 1 To NN
```

```
If NUMELEM(I) = 1 Then
  ELEMENTOS = 0
  For K = 1 To NUMELEM2(I)
    If VISIT(ELEM(I, K)) = 1 Then J =
    ELEM(I, K)
  Next K
  NI = N1(J)
  NJ = N2(J)
  If I = NI Then
  Else
    K = N1(J)
    N1(J) = N2(J)
    N2(J) = K
    NI = N1(J)
    NJ = N2(J)
  End If
  Dim PM1 As Double, PM2 As Double,
 PM3 As Double
  PM1 = (YC(NI) + (YC(NJ) - YC(NI)) / L(J)
 * L(J) / 4#) * L(J) / 2# * T(J)
  PM2 = (ZC(NI) + (ZC(NJ) - ZC(NI)) / L(J)
 * L(J) / 4#) * L(J) / 2# * T(J)
```

```
PM3 = (w(NI) + (w(NJ) - w(NI)) / L(J)
* L(J) / 4#) * L(J) / 2# * T(J)
Dim PF1 As Double, PF2 As Double,
PF3 As Double
PF1 = (YC(NI) + (YC(NJ) - YC(NI)) / L(J)
* L(J) / 2#) * L(J) * T(J)
PF2 = (ZC(NI) + (ZC(NJ) - ZC(NI)) / L(J)
* L(J) / 2#) * L(J) * T(J)
PF3 = (w(NI) + (w(NJ) - w(NI)) / L(J)
* L(J) / 2#) * L(J) * T(J)
'FLUJO
FLUJO(J, 1) = 0#
For K = 1 To NUMELEM2(I)
   If VISIT(ELEM(I, K)) = 0 Then
      FLUJO(J, 1) = FLUJO(J, 1) +
      FLUJO(ELEM(I, K), 3)
   End If
Next K
FLUJO(J, 2) = FLUJO(J, 1) + H1 * PM1
+ H2 * PM2 + H3 * PM3
FLUJO(J, 3) = FLUJO(J, 1) + H1 * PF1
+ H2 * PF2 + H3 * PF3
```

```
'MÁXIMO
FLUJO(J, 4) = -1#
FLUJO(J, 5) = 0#
AUX6 = (H1 * (YC(NJ) - YC(NI)) + H2
* (ZC(NJ) - ZC(NI)) + H3 * (w(NJ)
- w(NI))) / L(J)
If AUX6 <> 0# Then
   AUX5 = (H1 * YC(NI) + H2 * ZC(NI)
   + H3 * w(NI))
   SMAX = -AUX5 / AUX6
   If SMAX >= 0# And SMAX <= L(J) Then
      FLUJO(J, 4) = SMAX
      PM1 = (YC(NI) + (YC(NJ) - YC(NI))
     / L(J) * SMAX / 2#) * SMAX * T(J)
      PM2 = (ZC(NI) + (ZC(NJ) - ZC(NI))
     / L(J) * SMAX / 2#) * SMAX * T(J)
      PM3 = (w(NI) + (w(NJ) - w(NI))
    / L(J) * SMAX / 2#) * SMAX * T(J)
      FLUJO(J, 5) = FLUJO(J, 1) + H1
     * PM1 + H2 * PM2 + H3 * PM3
   End If
End If
```

```
        'RESULTANTE

        FLUJO(J, 6) = H1 * (2# * YC(NI)

        + YC(NJ)) / 6# * A(J) * L(J)

        FLUJO(J, 6) = FLUJO(J, 6) + H2 *

        (2# * ZC(NI) + ZC(NJ)) / 6# * A(J) * L(J)

        FLUJO(J, 6) = FLUJO(J, 6) + H3 *

        (2# * w(NI) + w(NJ)) / 6# * A(J) * L(J)

        FLUJO(J, 6) = FLUJO(J, 6) + FLUJO(J, 1)

       * L(J)

        VISIT(J) = 0

        NUMELEM(NJ) = NUMELEM(NJ) - 1

        NUMELEM(NI) = NUMELEM(NI) - 1

    End If

Next I

FLAG = FLAG + 1

If ELEMENTOS = 0 Then GoTo SIGUIENTE2

'OUTPUT

    For J = 1 To NE

        Hoja3.Cells(7 + J, 13) = J

        Hoja3.Cells(7 + J, 14) = N1(J)

        Hoja3.Cells(7 + J, 15) = N2(J)

        For I = 1 To 6
```

```
        Hoja3.Cells(7 + J, 15 + I) = FLUJO(J, I)
    Next I
  Next J
  'RESULTANTES TOTALES
  RZ = 0#: RY = 0#
  For J = 1 To NE
    S = (ZG(N2(J)) - ZG(N1(J))) / L(J)
    C = (YG(N2(J)) - YG(N1(J))) / L(J)
    RZ = RZ - FLUJO(J, 6) * S
    RY = RY - FLUJO(J, 6) * C
  Next J
  'Hoja2.Cells(1, 7) = RY
  'Hoja2.Cells(1, 9) = RZ
```

```
'Torsor Uniforme
Dim Tsv As Double
Tsv = Hoja2.Cells(13, 7)
For J = 1 To NE
  Hoja3.Cells(7 + J, 22) = Tsv / IT * T(J)
Next J
```

Crea un bucle y calcula las tensiones tangenciales en cada elemento debido al torsor de Saint Venant.

```
'Calculo de TENSIONES NORMALES

  Call CalculoTensiones

End Sub
```

Llama al código de cálculo de tensiones normales y finaliza el código actual.

A continuación se ejecuta el código para el cálculo de tensiones normales debidas al axil y los momentos flectores.

```
Public Sub CalculoTensiones()

  Dim I As Integer, NN As Integer

  NN = Hoja2.Cells(7, 3)

  Dim A As Double, Iyy As Double,

  Izz As Double, Iyz As Double,

  AUX As Double, Ia As Double

  Dim N As Double, My As Double,

 Mz As Double, B As Double

  'Lectura de los datos

  A = Hoja2.Cells(7, 13)

  Iyy = Hoja2.Cells(15, 13)

  Izz = Hoja2.Cells(16, 13)

  Iyz = Hoja2.Cells(17, 13)

  AUX = Iyy * Izz - Iyz * Iyz

  Ia = Hoja2.Cells(20, 13)

  N = Hoja2.Cells(7, 7)

  My = Hoja2.Cells(8, 7)
```

Lee los datos necesarios para el cálculo de tensiones normales.

```
Mz = Hoja2.Cells(9, 7)

B = Hoja2.Cells(10, 7)
```

```
'Tensiones normales debidas al axil y los flectores

Dim Sigma1 As Double, Sigma2 As Double,

Sigma3 As Double, Sigma4 As Double
```

```
Sigma1 = N / A
```

Calcula la tensión normal debida al axil.

```
For I = 1 To NN

  Dim y As Double, z As Double,

  w As Double

  y = Hoja3.Cells(7 + I, 5)

  z = Hoja3.Cells(7 + I, 6)

  w = Hoja2.Cells(19 + I, 10)

  Sigma2 = (-My * Iyz / AUX) * y +

 (My * Izz / AUX) * z

  Sigma3 = (-Mz * Iyy / AUX) * y +

 (Mz * Iyz / AUX) * z

  Sigma4 = B / Ia * w

  Hoja3.Cells(7 + I, 7) = Sigma1

  Hoja3.Cells(7 + I, 8) = Sigma2

  Hoja3.Cells(7 + I, 9) = Sigma3

  Hoja3.Cells(7 + I, 10) = Sigma4
```

Crea un bucle donde lee las coordenadas baricéntricas y las coordenadas sectoriales de cada nodo, calcula las tensiones normales producidas por los momentos flectores y el bimomento y finalmente las suma y obtiene la tensión normal total. Copia todos los resultados en las celdas de la hoja 3 correspondientes.

```
    Hoja3.Cells(7 + I, 11) = Sigma1 + Sigma2
    + Sigma3 + Sigma4
  Next I
End Sub
```

→ Finaliza el código.

8.2. Verificación del programa

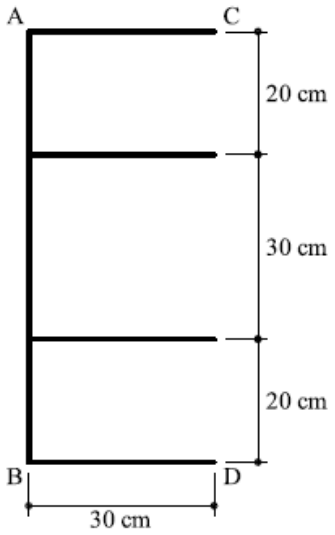
En éste capítulo se demostrará el correcto funcionamiento del programa de cálculo, utilizando varios ejemplos de la bibliografía técnica utilizada para el desarrollo del presente trabajo.

8.2.1. Ejemplo 1

Éste ejemplo está recogido del libro *Problemas de Resistencia de Materiales*, de Juan Miquel Canet (pág 225).

Problema 4.20 *En la sección que se representa en la figura 1 el espesor de todas las paredes es el mismo (e =1,1 cm). Cuando actúa un esfuerzo axil de compresión de valor N = 120 kN en el punto medio de AB, hallar:*

- *Máxima tensión de tracción*
- *Máxima tensión de compresión*
- *Distribución de tensiones normales*



Solución:

Las características mecánicas de la sección valen (ver figura 2)

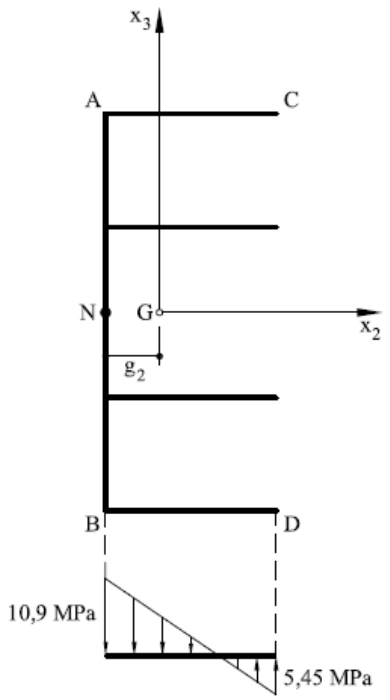
$A = 209\ cm^2$
$g_2 = 9{,}474\ cm$
$I_2 = 127.142\ cm^4$ $\qquad$ $I_3 = 20.843\ cm^4$

La máxima tensión de tracción se produce en C o en D y vale

$$\sigma_c = -\frac{120}{209} + \frac{120 \times 9{,}474 \times (30 - 9{,}474)}{20843} = 0{,}545\ \frac{kN}{cm^2} = 5{,}45\ MPa \quad (tracción)$$

La máxima tensión de compresión se produce en la línea AB y vale:

$$\sigma_A = -\frac{120}{209} - \frac{120 \times 9{,}474^2}{20843} = -1{,}09\ \frac{kN}{cm^2} = -10{,}9\ MPa \quad (compresión)$$



Resolución con el programa EEBE Secciones Delgadas

Para resolver éste ejemplo mediante el programa de cálculo debemos tener en cuenta que el axil provoca un momento flector en el eje z de valor $M_z = N \cdot g_2 = 120 \cdot 9{,}47 = 1136{,}4$ kN·cm.

En nuestro programa, el nodo A se corresponde con el nodo 2, el nodo B con el 5, el nodo C con el 1 y el nodo D con el 6.

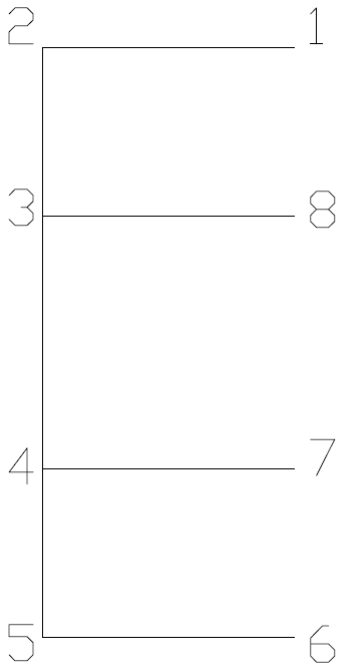


Figura 8.1. Perfil del ejemplo 1, ordenado según nodos del programa (Fuente: Javier Gilbert)

Introduciendo los datos en nuestro programa y ejecutando el código, obtenemos los siguientes resultados:

Parámetros de la sección discretizada

Nº NODOS	8
Nº ELEMENTOS	7

Introducción esfuerzos en la sección

Axil, N	-120	kN
Flector, M_y		kN·cm
Flector, M_z	1136,4	kN·cm
Bimomento, B		kN·cm²
Cortante, Q_y		kN
Cortante, Q_z		kN
Torsor, T_{sv}		kN·cm
Torsor, T_w		kN·cm

CALCULAR

Propiedades de la sección

Area (cm^2)	209,00
Momentos estáticos:	
S_y (cm^3)	7315,00
S_z (cm^3)	4290,00
Baricentro o centro de gravedad (cdg):	
y_{cdg} (cm)	20,53
z_{cdg} (cm)	35,00
Producto y momentos de incercia baricentricos:	
I_y (cm^4)	127141,67
I_z (cm^4)	20842,11
I_{yz} (cm^4)	0,00
Propiedades a torsión:	
I_T (cm^4)	84,30
I_w (cm^6)	12502408,07
Centro de esfuerzos cortantes (cec):	
y_{cec} (cm)	41,29
z_{cec} (cm)	35,00

Variables de control:

I_{yw} (cm^5)	0,00
I_{zw} (cm^5)	0,00

Introducción coordenadas nodales

Coordenadas nodales				Nodo inicial y final			Coordenadas sectoriales	
Nodo	Y (cm)	Z (cm)	Elemento	Nodo 1	Nodo 2	Espesor (cm)	Nodo	ω (cm^4)
1	0	0	1	1	2	1,1	1	-654,83
2	30	0	2	2	3	1,1	2	395,17
3	30	20	3	3	4	1,1	3	169,36
4	30	50	4	4	5	1,1	4	-169,36
5	30	70	5	5	6	1,1	5	-395,17
6	0	70	6	4	7	1,1	6	654,83
7	0	50	7	3	8	1,1	7	280,64
8	0	20					8	-280,64

INSTRUCCIONES | PRINCIPAL | RESULTADOS | CORTANTE,QY | CORTANTE,Qz | TORSOR ALAB ...

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola d'Enginyeria de Barcelona Est

CÁLCULO DE TENSIONES

TENSIONES NORMALES

Nodo	Coordenadas globales		Coordenadas baricentricas		Componentes de la tensión normal (kN/cm^2)				Tensión total (kN/cm2)
	Y (cm)	Z (cm)	Y (cm)	Z (cm)	Axil, N	Flector, My	Flector z, Mz	Bimomento, B	
1	0	0	-20,53	-35	-0,57	0,00	1,12	0,00	0,55
2	30	0	9,47	-35	-0,57	0,00	-0,52	0,00	-1,09
3	30	20	9,47	-15	-0,57	0,00	-0,52	0,00	-1,09
4	30	50	9,47	15	-0,57	0,00	-0,52	0,00	-1,09
5	30	70	9,47	35	-0,57	0,00	-0,52	0,00	-1,09
6	0	70	-20,53	35	-0,57	0,00	1,12	0,00	0,55
7	0	50	-20,53	15	-0,57	0,00	1,12	0,00	0,55
8	0	20	-20,53	-15	-0,57	0,00	1,12	0,00	0,55

INSTRUCCIONES | PRINCIPAL | RESULTADOS | CORTANTE,QY | CORTANTE,Qz | TORSOR ALAB ...

Como se observa en el nodo 1 y 6 (nodos C y D del problema) se produce una tensión de 0,55 kN/cm^2 de tracción, lo que equivale a 5,5 MPa.

En el nodo 2 y 5 (nodos A y B del problema) se produce una tensión de 1,09 kN/cm^2 a compresión, lo que equivale a 10,9 MPa.

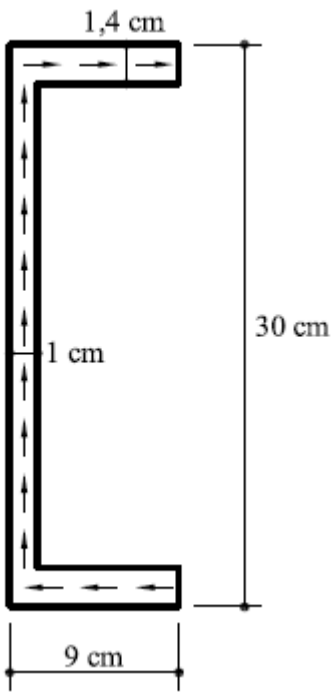
También podemos comprobar que las propiedades obtenidas son correctas, tanto el Área (209 cm^2) como el momento de inercia y (127142 cm^4) han dado unos resultados correctos.

Con lo que podemos concluir que los resultados obtenidos en el programa se corresponden con la solución del problema y podemos dar por verificado que el programa responde correctamente al cálculo de tensiones normales y de propiedades.

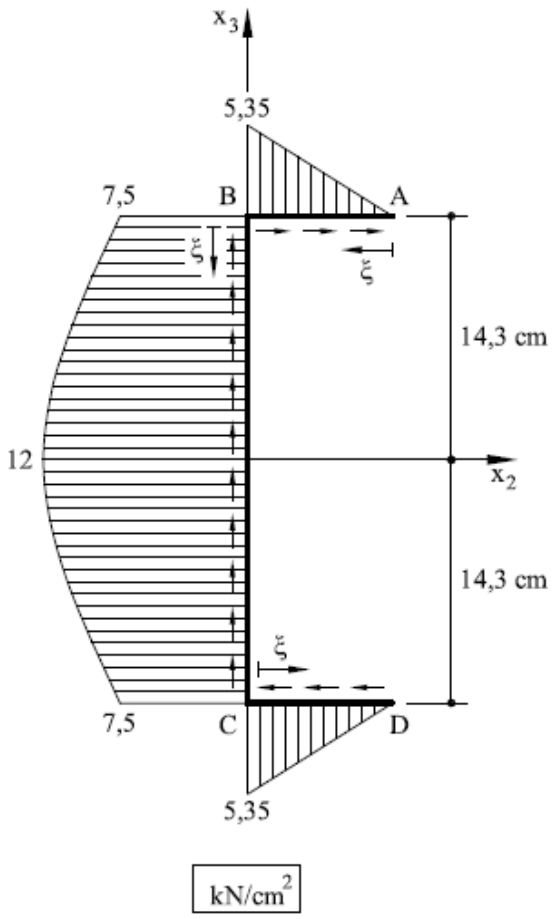
8.2.2. Ejemplo 2

Éste ejemplo está recogido del libro *Problemas de Resistencia de Materiales*, de Juan Miquel Canet (pág 295).

Problema 5.1 *Hallar la distribución de tensiones tangenciales en las dos secciones de la figura 1, cuando actúa un esfuerzo cortante de valor Q, vertical ascendente de valor Q=300 kN.*



Solución:



Resolución con el programa EEBE Secciones Delgadas

Para resolver éste problema en primer paso debe discretizarse la sección de la siguiente forma:

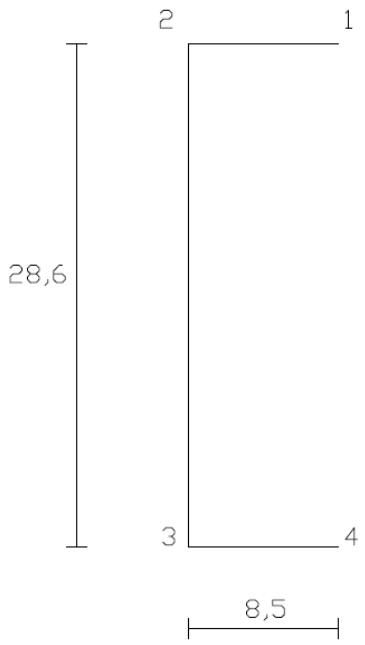


Figura 8.2. Sección discretizada del ejemplo 2 (Fuente: Javier Gilbert)

Una vez introducidos todos los datos obtenemos los siguientes resultados:

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola d'Enginyeria de Barcelona Est

INTRODUCCIÓN DE DATOS

Parámetros de la sección discretizada

Nº NODOS	4
Nº ELEMENTOS	3

Introducción esfuerzos en la sección

Axil, N		kN
Flector, M_y		kN·cm
Flector, M_z		kN·cm
Bimomento, B		kN·cm²
Cortante, Q_y		kN
Cortante, Q_z	300	kN
Torsor, T_{sv}		kN·cm
Torsor, T_w		kN·cm

CALCULAR

Propiedades de la sección

Area (cm^2)	52,40
Momentos estáticos:	
S_y (cm^3)	749,32
S_z (cm^3)	344,25
Baricentro o centro de gravedad (cdg):	
y_{cdg} (cm)	6,57
z_{cdg} (cm)	14,30
Producto y momentos de incercia baricentricos:	
I_y (cm^4)	6816,33
I_z (cm^4)	377,93
I_{yz} (cm^4)	0,00
Propiedades a torsión:	
I_T (cm^4)	25,08
I_w (cm^6)	54444,17
Centro de esfuerzos cortantes (cec):	
y_{cec} (cm)	11,53
z_{cec} (cm)	14,30

Variables de control:

I_{yw} (cm^5)	0,00
I_{zw} (cm^5)	0,00

Introducción coordenadas nodales

	Coordenadas nodales			Nodo inicial y final			Coordenadas sectoriales	
Nodo	Y (cm)	Z (cm)	Elemento	Nodo 1	Nodo 2	Espesor (cm)	Nodo	ω (cm^2)
1	0	0	1	1	2	1,4	1	-78,16
2	8,5	0	2	2	3	1	2	43,39
3	8,5	28,6	3	3	4	1,4	3	-43,39
4	0	28,6					4	78,16

INSTRUCCIONES | PRINCIPAL | RESULTADOS | CORTANTE,QY | CORTANTE,Qz | TORSOR ALAB ...

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola d'Enginyeria de Barcelona Est

FLUJO DE TENSIONES DEBIDAS AL CORTANTE Qz

Esfuerzos	
Q_y (kN)	0,00
Q_z (kN)	300,00

Control	
R_y (kN)	0,00
R_z (kN)	300,00

Elemento	Nodo inicial y final		Flujo de tensiones tengenciales (kN/cm)			Flujo máximo		Resultante
	N_i	N_k	q_i	q_{med}	q_k	s_{max} (cm)	q_{max} (kN/cm)	R (kN)
1	1	2	0,00	-3,74	-7,49	-1,00	0,00	-31,83
2	2	3	-7,49	-11,99	-7,49	14,30	-11,99	-300,00
3	3	4	-7,49	-3,74	0,00	-1,00	0,00	-31,83

INSTRUCCIONES | PRINCIPAL | RESULTADOS | CORTANTE,QY | CORTANTE,Qz | TORSOR ALAB ...

Cabe destacar que el programa nos devuelve flujo de tensiones tangenciales, con lo cual para obtener la tensión tangencial en el nodo deseado solo hará falta dividir entre el espesor del elemento.

Para comprobar los resultados pasamos los resultados a tensiones tangenciales para así poder comparar con la solución dada en el problema resuelto:

Elemento	Nodo i	Nodo k	Flujo nodo i, (kN/cm)	Flujo nodo k, (kN/cm)	Tensión tangencial nodo i (kN/cm²)	Tensión tangencial nodo k (kN/cm²)
1	1	2	0	-7,49	0	-5,35
2	2	3	-7,49	-7,49	-7,49	-7,49
3	3	4	-7,49	0	-5,35	0

Como podemos observar los resultados se corresponden con la solución del problema, siendo la distribución de tensiones tangenciales igual a la resolución y podemos observar que se establece un equilibrio de fuerzas. Con lo cual podemos garantizar que el programa realiza un correcto cálculo de los flujos de tensiones tangenciales.

Conclusiones

Al inicio del presente TFG se ha comentado la motivación y se han definido los objetivos con los cuales se partían a la hora de iniciar el proyecto, éstos eran en gran parte el aprendizaje de las ecuaciones y teoría de cálculo tensional en secciones delgadas, además del aprendizaje de un lenguaje de programación para el desarrollo de un software informático, todo ello en forma de aprendizaje autónomo. Para ello se han utilizado una serie de libros y artículos técnicos, así como sitios web de tal manera que mediante los conocimientos adquiridos en la lectura de ésta bibliografía técnica se ha elaborado un trabajo que es de fácil comprensión para el lector.

El estudio previo se ha centrado en gran parte en un concepto poco desarrollado en los estudios de las asignaturas de resistencia de materiales y estructuras como es la tensión debida a la torsión, tanto uniforme como no uniforme, el cual ha requerido un mayor esfuerzo para su aprendizaje y posterior desarrollo en el trabajo. Con los conocimientos adquiridos, unidos al repaso de los conceptos ya definidos y estudiados durante el grado en ingeniería mecánica, se ha conseguido obtener un nivel elevado de conocimientos en la materia de resistencia de materiales y estructuras necesarios para ejercer una futura profesión en el sector.

Mediante las ecuaciones obtenidas en el estudio, se ha podido elaborar un código de programación en lenguaje visual basic con el que se ha creado un programa de cálculo en entorno Microsoft Excel, previamente se ha estudiado la forma de programar con dicho lenguaje, llegando a obtener un nivel elevado de programación necesario para la realización del programa que se presenta adjunto a éste trabajo. Pese a ello se han encontrado dificultades a la hora de programas el flujo de tensiones tangenciales debido a la complejidad que su programación requiere, todo ello se ha podido corregir a tiempo y se ha verificado su correcto funcionamiento.

Una de las motivaciones principales que llevó al autor a realizar el presente trabajo fue el de dar una herramienta de cálculo con un estudio detallado a el futuro alumnado de la escuela, con el que poder ayudar a cualquiera que esté interesado a seguir ampliando sus conocimientos en la materia. El programa constituye un instrumento de cálculo de tensiones normales y tangenciales, se ha elaborado de tal manera que con la introducción de unos datos muy simples otorga al usuario de una gran cantidad de información, siendo una herramienta de estudio muy eficaz a la hora de la resolución y comprobación de ejercicios.

Cabe destacar que a lo largo de éste proyecto se han debido utilizar conocimientos y se han adquirido otros de áreas tan diversas como las matemáticas, en la resolución de integrales y derivadas, resistencia de materiales y estructuras en los cálculos de tensiones y de programación en el desarrollo del software, todo ello puede garantizar que se han logrado los objetivos marcados en el inicio del

trabajo, dando un valor añadido a su realización y aportando conocimientos muy diversos y muy importantes a su autor.

Se ha dejado para posteriores trabajos de cualquier alumno que así lo desee, la implementación en el programa del cálculo de flujos de tensiones tangenciales debido a los diferentes tipos de esfuerzos estudiados para secciones cerradas.

Presupuesto

SOFTWARE SECCIONES DELGADAS						
Codi	***NatC***	***Ud***	***Resumen***	***Cant***	***Pres***	***ImpPres***
01.01	Partida	h	**Estudio tensional** Realización de un estudio tensional para obtener las ecuaciones necesarias para la determinación de las tensiones a las que está sometido una sección delgada cualquiera. Incluye documentación técnica.	200,00	50,00 €	10.000,00 €
01.02	Partida	h	**Desarrollo del código** Creación del código para la programación del software en lenguaje Visual Basic y entorno Microsoft Excel. Incluye explicación de éste en un capítulo de la memoria.	130,00	100,00 €	13.000,00 €
01.03	Partida	h	**Ingeniería de supervisión** Creación de las pantallas necesarias para la visulización de las funciones realizadas por el programa.	70,00	90,00 €	6.300,00 €
01.04	Partida	h	**Verificación del software** Verificación del correcto funcionamiento del software mediante ejemplos sacados de la bibliografía técnica del trabajo.	50,00	90,00 €	4.500,00 €
01.05	Partida	h	**Creación manual software** Creación de la documentación necesaria para la correcta utilización del programa por parte del usuario.	12,00	50,00 €	600,00 €
			Total			**34.400,00 €**

El estudio realizado en el presente TFG y la creación del software EEBE Secciones Delgadas asciende a la cantidad de 34.400,00 €.

Bibliografía

[1] Bahena, C. R., Muñoz, M. R., & Díaz, J. A. (2014). Determinación de los esfuerzos producidos por flexo-torsión. *Revista Ingeniería y Región*, 105-127.

[2] Bottero, C., Actis, M. D., & Patanella, A. J. (2007). *Torsión en barras de pared delgada*. La Plata, Argentina.

[3] Canet, J. M. (2000). *Cálculo de estructuras. Libro 1. Fundamentos y estudio de secciones.* Barcelona: Edicions UPC.

[4] Canet, J. M. (s.f.). *Problemas de Resistencia de Materiales y Estructuras.*

[5] Murray, N. W., & Attard, M. M. (1987). A Direct Method of Evaluating the Warping Properties of Thin-Walled Open and Closed Profiles. *Elsevier Applied Science Publishers* , 351-364.

[6] Prendes Gero, M. B., González Nicieza, C., Álvarez Vigil, A. E., & Álvarez Fernández, M. I. (s.f.). *Torsión no uniforme en secciones metálicas de pared delgada*. Mieres, España.

[7] Ruiz, M. C., & Díaz, E. B. (2001). *Mecánica de estructuras. Libro 1. Resistencia de Materiales.* Barcelona: Edicions UPC.

[8] Shama, M. (2010). Chapter 2. Torsion Stresses in Thin-Walled in Multi-Cell Box-Girders. En *Torsion and Shear Stresses in Ships* (págs. 21-39). Springer-Verlag.

[9] *Visual Basic Guide*. (s.f.). Obtenido de https://docs.microsoft.com/en-us/dotnet/visual-basic/index

Anexo A

A1. Manual del usuario

El programa EEBE Secciones delgadas es un software informático desarrollado en entorno Microsoft Excel con el cual podemos calcular lo siguiente:

- Propiedades geométricas de la sección.
- Coordenadas sectoriales de cada nodo.
- Tensiones normales debidas al axil, momentos flectores y al bimomento.
- Tensión normal total de la sección
- Flujo de tensiones tangenciales debido a cortantes y torsor de alabeo.
- Flujo de tensiones tangenciales totales en la sección.
- Tensión tangencial debida al torsor de Saint Venant.

1) <u>Instrucciones</u>

Al abrir el archivo llamado EEBE_SECCIONES_DELGADAS nos aparecerá una primera pantalla de instrucciones básicas, se deberán leer atentamente y seguirlas para el correcto funcionamiento del programa.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola d'Enginyeria de Barcelona Est

EEBE SECCIONES DELGADAS

SOFTWARE DE CÁLCULO TENSIONAL EN SECCIONES DELGADAS

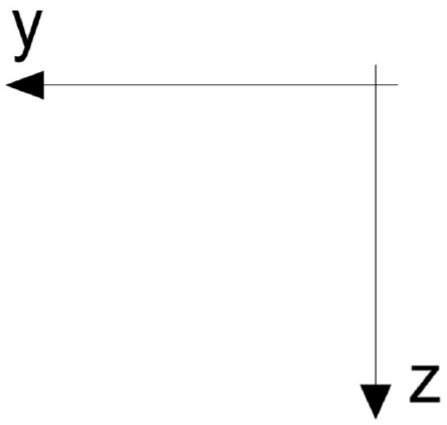
Instrucciones básicas de uso:

1) No se pueden añadir ni eliminar columnas ni texto de éste documento

2) Los datos se deben introducir en las casillas marcadas en azul claro

3) Las casillas de control son propiedades o esfuerzos para verificar que el cálculo es correcto.

4) Se deben seleccionar unos ejes globales según las siguientes direcciones:

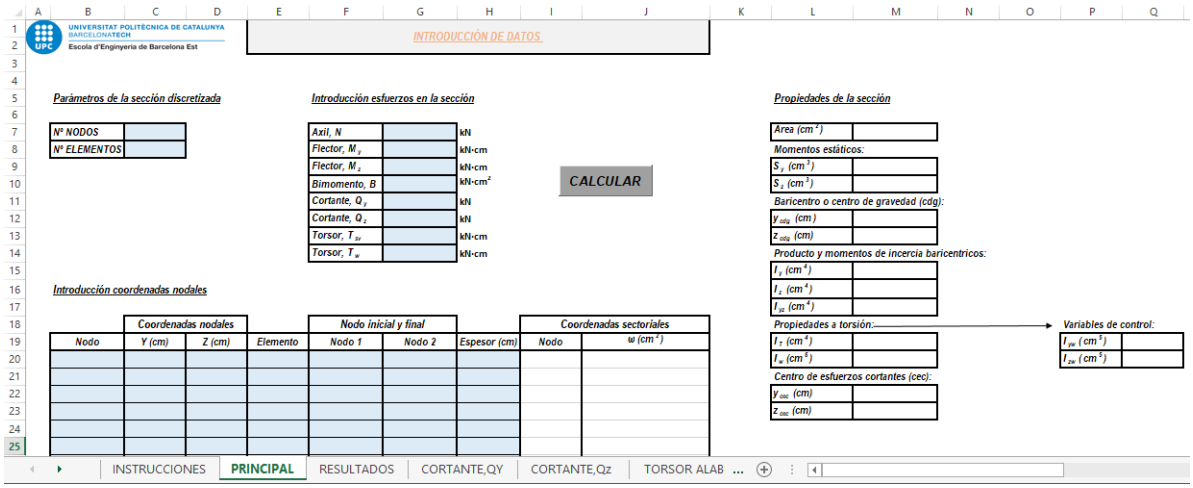


5) Una vez introducidos los datos, apretar al botón cálculo para obtener los resultados.

Autor: Javier Gilbert Pino
Mayo 2018, Barcelona

2) Introducción de datos y cálculo propiedades geométricas

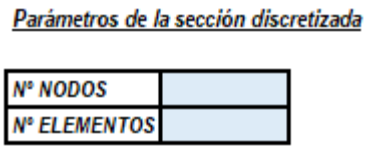
Seguidamente haciendo click sobre la pestaña "PRINCIPAL" situada en el inferior de la pantalla, se nos abrirá una nueva pantalla como la que se muestra.



En ella se deberán introducir unos datos en las casillas marcadas en azul, para poder proceder a la ejecución del programa, como son:

- Nº nodos de la sección discretizada.
- Nº de elementos de la sección discretizada.
- Esfuerzos que actúan sobre la sección.
- Nodos con sus coordenadas globales.
- Elementos con sus nodos iniciales y finales y su espesor.

En la parte superior izquierda tenemos dos casillas donde deberemos introducir el número de nodos y elementos de la sección discretizada.



En los recuadros de la parte superior central deberemos introducir las solicitaciones que actúan sobre nuestra sección, con las unidades indicadas.

Introducción esfuerzos en la sección

Axil, N		kN
Flector, M_y		kN·cm
Flector, M_z		kN·cm
Bimomento, B		kN·cm^2
Cortante, Q_y		kN
Cortante, Q_z		kN
Torsor, T_{sv}		kN·cm
Torsor, T_w		kN·cm

Para finalizar la introducción de datos deberemos introducir la geometría de nuestra sección.

Introducción coordenadas nodales

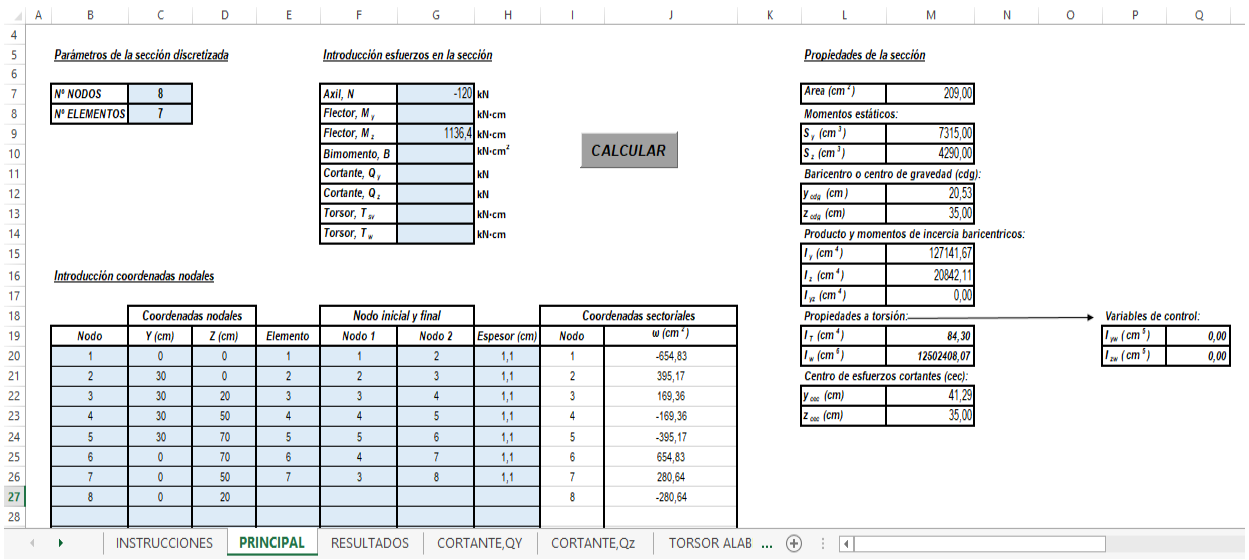
	Coordenadas nodales			Nodo inicial y final		
Nodo	Y (cm)	Z (cm)	Elemento	Nodo 1	Nodo 2	Espesor (cm)

En la columna "Nodo" se deben introducir los nodos de forma ordenada de nuestra sección, seguidamente a la derecha en las columnas de "Coordenadas nodales" se deberán introducir las coordenadas yz en cm de cada uno de los nodos según los ejes seleccionados (tomar la dirección de los ejes según se expresa en la pestaña de instrucciones).

En la columna “Elemento” se deberán indicar todos los elementos de forma ordenada y a la derecha de éstos en las columnas “Nodo inicial y final” se deberán especificar los nodos iniciales y finales de cada elemento (éstos pueden ser seleccionados de forma arbitraria). El último paso será introducir el espesor de cada elemento en cm en la columna “Espesor”.

3) Resultados

Una vez introducidos los datos correctamente, se deberá pulsar sobre el botón “calcular” para ejecutar el código, el cual devolverá los resultados de tensiones, propiedades geométricas y coordenadas sectoriales. A continuación se muestra un ejemplo:



Parámetros de la sección discretizada

Nº NODOS	8
Nº ELEMENTOS	7

Introducción esfuerzos en la sección

Axil, N	-120	kN
Flector, M_y		kN·cm
Flector, M_z	1136,4	kN·cm
Bimomento, B		kN·cm²
Cortante, Q_y		kN
Cortante, Q_z		kN
Torsor, T_{sv}		kN·cm
Torsor, T_w		kN·cm

CALCULAR

Propiedades de la sección

Area (cm^2)	209,00
Momentos estáticos:	
S_y (cm^3)	7315,00
S_z (cm^3)	4290,00
Baricentro o centro de gravedad (cdg):	
y_{cdg} (cm)	20,53
z_{cdg} (cm)	35,00
Producto y momentos de incercia baricentricos:	
I_y (cm^4)	127141,67
I_z (cm^4)	20842,11
I_{yz} (cm^4)	0,00
Propiedades a torsión:	
I_T (cm^4)	84,30
I_w (cm^6)	12502408,07
Centro de esfuerzos cortantes (cec):	
y_{cec} (cm)	41,29
z_{cec} (cm)	35,00

Variables de control:

I_{yw} (cm^5)	0,00
I_{zw} (cm^5)	0,00

Introducción coordenadas nodales

	Coordenadas nodales			Nodo inicial y final			Coordenadas sectoriales	
Nodo	Y (cm)	Z (cm)	Elemento	Nodo 1	Nodo 2	Espesor (cm)	Nodo	ω (cm^2)
1	0	0	1	1	2	1,1	1	-654,83
2	30	0	2	2	3	1,1	2	395,17
3	30	20	3	3	4	1,1	3	169,36
4	30	50	4	4	5	1,1	4	-169,36
5	30	70	5	5	6	1,1	5	-395,17
6	0	70	6	4	7	1,1	6	654,83
7	0	50	7	3	8	1,1	7	280,64
8	0	20					8	-280,64

INSTRUCCIONES | PRINCIPAL | RESULTADOS | CORTANTE,QY | CORTANTE,Qz | TORSOR ALAB ...

Como se observa en la pestaña principal nos muestra el cálculo de las propiedades geométricas de la sección y las coordenadas sectoriales de cada nodo con sus unidades correspondientes.

En la barra inferior observamos diferentes pestañas, cada una de ellas nos muestran resultados diferentes.

Pestaña resultados

En la tercera pestaña, RESULTADOS nos muestra las tensiones normales y tangenciales totales debidas a las diferentes solicitaciones que actúan sobre nuestro cuerpo estudiado.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola d'Enginyeria de Barcelona Est

CÁLCULO DE TENSIONES

TENSIONES NORMALES									
Nodo	Coordenadas globales		Coordenadas baricentricas		Componentes de la tensión normal (kN/cm ^{2})				Tensión total (kN/cm2)
	Y (cm)	Z (cm)	Y (cm)	Z (cm)	Axil, N	Flector, My	Flector z, Mz	Bimomento, B	
1	0	0	-20,53	-35	-0,57	0,00	1,12	0,00	0,55
2	30	0	9,47	-35	-0,57	0,00	-0,52	0,00	-1,09
3	30	20	9,47	-15	-0,57	0,00	-0,52	0,00	-1,09
4	30	50	9,47	15	-0,57	0,00	-0,52	0,00	-1,09
5	30	70	9,47	35	-0,57	0,00	-0,52	0,00	-1,09
6	0	70	-20,53	35	-0,57	0,00	1,12	0,00	0,55
7	0	50	-20,53	15	-0,57	0,00	1,12	0,00	0,55
8	0	20	-20,53	-15	-0,57	0,00	1,12	0,00	0,55

INSTRUCCIONES | PRINCIPAL | RESULTADOS | CORTANTE,QY | CORTANTE,Qz | TORSOR ALAB ...

En una primera tabla observamos los cálculos de tensiones normales, en dicha tabla nos muestra las coordenadas baricéntricas de cada nodo y las tensiones normales generadas por todos los esfuerzos estudiados durante el presente trabajo (axil, flectores y bimomento) y en una última columna nos da la tensión total a la que ésta sometida nuestra sección.

TENSIONES TANGENCIALES									
Elemento	Nodo inicial y final		Flujo de tensiones tengenciales (kN/cm)			Flujo máximo		Resultante	Torsión uniforme
	N_i	N_k	q_i	q_{med}	q_k	s_{max} (cm)	q_{max} (kN/cm)	R (kN)	τ (kN/cm ^{2})
1	1	2	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	0,00
2	2	3	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	0,00
3	3	4	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	0,00
4	4	5	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	0,00
5	6	5	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	0,00
6	7	4	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	0,00
7	8	3	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	0,00

NCIPAL | RESULTADOS | CORTANTE,QY | CORTANTE,Qz | TORSOR ALAB ...

Desplazándonos en la misma pestaña hacia la derecha observamos una segunda tabla, en la que nos muestra los resultados de flujos de tensiones tangenciales debidas a esfuerzos cortantes y torsor de alabeo y tensión tangencial debida al torsor uniforme o de Saint Venant.

Ésta tabla puede prestar a confusiones, para ello es importante entender que resultados nos está devolviendo el programa.

En las columnas "Nodo inicial y final" se nos muestran los nodos iniciales y finales de cada elemento seleccionados por el programa, éstos pueden diferir en sentido de los seleccionados por el usuario.

En las columnas "Flujo de tensiones tangenciales" nos muestra el flujo en el punto inicial, medio y final de cada elemento, con su signo correspondiente. En éste caso un valor negativo (-) significa que el flujo va en el mismo sentido que el elemento (del nodo inicial al final) y un valor positivo significa que el flujo va en el sentido contrario al elemento (del nodo final al inicial).

En las columnas "Flujo máximo" nos muestra si se da el caso en que punto del elemento hay un punto máximo (columna Smax) y el valor de éste (qmax). El punto máximo nos lo da partiendo del nodo inicial del elemento. Si se da el caso de que el punto máximo se encuentra en cualquiera de los extremos del elemento, en la columna "Smax" nos dará un valor de -1 y la columna "qmax" nos mostrará un valor de 0.

La columna "Resultante" nos devuelve el valor de la fuerza resultante debida a los esfuerzos que actúan sobre nuestra sección, con la cual ésta quedará en equilibrio.

Finalmente la última columna de la tabla, nos muestra los resultados de tensiones tangenciales debidas al torsor uniforme o de alabeo.

Pestaña Cortante Qy

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola d'Enginyeria de Barcelona Est

FLUJO DE TENSIONES DEBIDAS AL CORTANTE Qy

Esfuerzos	
Q_y (kN)	0,00
Q_z (kN)	0,00

Control	
R_y (kN)	0,00
R_z (kN)	0,00

Elemento	Nodo inicial y final		Flujo de tensiones tengenciales (kN/cm)			Flujo máximo		Resultante
	N_i	N_k	q_i	q_{med}	q_k	s_{max} (cm)	q_{max} (kN/cm)	R (kN)
1	1	2	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00
2	2	3	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00
3	3	4	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00
4	4	5	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00
5	6	5	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00
6	7	4	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00
7	8	3	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00

INSTRUCCIONES | PRINCIPAL | RESULTADOS | CORTANTE,QY | CORTANTE,Qz | TORSOR ALAB ...

En ésta pestaña se mostrarán los resultados por separado del flujo de tensiones tangenciales debidas al esfuerzo cortante que actúa en el eje y. Los resultados mostrados deben ser interpretados de igual forma que los resultados obtenidos en la pestaña de RESULTADOS.

En la parte superior muestra los esfuerzos a los que ésta sometida la sección, en éste caso al estar calculando únicamente la tensión debida al cortante en el eje y, el cortante z debe ser igual a cero. También podemos observar la variable de control R_z y R_y con las que podremos verificar si se cumple el equilibrio con el fin de detectar si se ha producido algún error en la introducción de datos.

Pestaña cortante Qz

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola d'Enginyeria de Barcelona Est

FLUJO DE TENSIONES DEBIDAS AL CORTANTE Qz

Esfuerzos	
Q_y (kN)	0,00
Q_z (kN)	0,00

Control	
R_y (kN)	0,00
R_z (kN)	0,00

Elemento	Nodo inicial y final		Flujo de tensiones tengenciales (kN/cm)			Flujo máximo		Resultante
	N_i	N_k	q_i	q_{med}	q_k	s_{max} (cm)	q_{max} (kN/cm)	R (kN)
1	1	2	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00
2	2	3	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00
3	3	4	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00
4	4	5	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00
5	6	5	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00
6	7	4	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00
7	8	3	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00

INSTRUCCIONES | PRINCIPAL | RESULTADOS | CORTANTE,QY | CORTANTE,Qz | TORSOR ALAB ...

Al igual que la anterior pestaña, muestra los resultados de flujos de tensiones tangenciales pero en ésta ocasión debidas al cortante en el eje z. Su interpretación de los resultados se realiza de la misma forma que la pestaña anterior.

Pestaña torsor alabeo

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola d'Enginyeria de Barcelona Est

FLUJO DE TENSIONES DEBIDAS AL TORSOR DE ALABEO Tw

Esfuerzos

T_w (kN·cm)	0,00

Elemento	Nodo inicial y final		Flujo de tensiones tengenciales (kN/cm)			Flujo máximo		Resultante
	N_i	N_k	q_i	q_{med}	q_k	s_{max} (cm)	q_{max} (kN/cm)	R (kN)
1	1	2	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00
2	2	3	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00
3	3	4	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00
4	4	5	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00
5	6	5	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00
6	7	4	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00
7	8	3	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00

INSTRUCCIONES | PRINCIPAL | RESULTADOS | CORTANTE,QY | CORTANTE,Qz | TORSOR ALAB ...

La última pestaña, muestra los resultados de flujos de tensiones tangenciales debidas al torsor de alabeo. Al igual que los resultados debidos a los cortantes z e y nos muestra el punto de flujo máximo, su valor y la resultante.

A2. Autorización defensa TFG

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola d'Enginyeria de Barcelona Est

VIST I PLAU D'AUTORIZACIÓ DE DEFENSA DE TREBALL FI DE ... (indicar el que pertoqui GRAU/MÀSTER)

Jo, FERRAN PRATS BELLA Director/a del TFG/TFM dut a terme per l'estudiant/a:

Nom : Javier

Cognoms : Gilbert Pino

DNI : 48024437-T

Grau en Enginyeria : Mecánica Màster en :

A C R E D I T O:

Que l'estudiant/a es troba en condicions de realitzar, en la present convocatòria, la defensa del treball de fi de Grau/de Màster que a continuació es relaciona:

Títol del TFG/TFM: Estudio tensional de una sección delgada e implementación en un software de cálculo

INFORMACIÓ NECESSÀRIA		
Competència genèrica a avaluar		Aprendizaje autónomo
Codirector (en cas que n'hi hagi)		
Empresa externa	Nom de l'Empresa	
(en cas de modalitat B o D)	Codirector de l'empresa	

I perquè consti, a petició de l'interessat i als efectes d'autorització de defensa de TFG/TFM, signo el present vist i plau.

Barcelona a, 26 de abril de 20 18

El/la Director/a del TFG/TFM

Signatura: